最小根付きk-部分木問題に対する ラグランジュ緩和を用いた貪欲的下界値算法の改善

02004490　防衛大学校情報工学科　*荒木紀雄　ARAKI Norio
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡靖詞　KATAOKA Seiji

1　概要

点集合Vと枝集合Eからなる無向連結グラフ$G=(V,E)$において，根となる節点$r\in V$と整数k $(1\leq k\leq |V|-1)$が与えられている．このとき**根付きk-部分木**とは“rを根として枝の数がちょうどk本であるような連結部分木”をいう．本研究では，各枝にコストを与え，枝のコストの総和が最小となるような根付きk-部分木を考え，これを**最小根付きk-部分木問題**(k-STP)と呼ぶことにする．

k-STPに対する下界値算法としては，片岡，星崎ら[2, 3]が貪欲的下界値算法(GLB)を提案しているが，本研究では，GLBをさらに効果的に用いるため**定式化を改訂**し，**ラグランジュ緩和を適用**することにより片岡，星崎らのGLBよりもよい下界値を得る．

2　従来の研究[2,3]

2.1　定式化

枝$(i,j)\in E$のコストをc_{ij}，Sを$r\in S$かつ$|S|\leq k$であるような節点集合，その補集合を$\overline{S}$とする．また，決定変数x_{ij}を枝(i,j)が解に含まれるとき1，そうでないとき0とするとき，k-STPは次のように定式化できる．

$$\min \quad \textstyle\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$
$$\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} x_{ij}=k \tag{2}$$
$$\textstyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in \overline{S}} x_{ij}\geq 1 \quad \forall S \tag{3}$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \tag{4}$$

制約式(3)は，サイクルの除去及び連結性を示している．

2.2　貪欲的下界値算法(GLB)

片岡，星崎ら[2, 3]は，枝に根節点rからの**歩数**という制限をつけ，その制限下で枝をk本選択する貪欲的下界値算法(Greedy Lower Bound：以下GLB)を提案している．歩数とは，根節点rからグラフGの枝を幅優先探索したときに付与される探索木の枝のレベルのことである(図1)．

GLBは，i本目の枝を歩数$1,2,\ldots,i$の枝の中からKruskalの最小木算法[1]を利用してk本とる算法であり，k-STPの下界値を与える[2]．

3　ラグランジュ緩和を用いたGLBの改善

3.1　定式化の改訂

枝集合$\boldsymbol{x}$を(i) $|\boldsymbol{x}|=k$，(ii) サイクルを構成しない，(iii) $\boldsymbol{x}$の枝に対し，

i番目の枝の歩数$\leq i$

となるように番号$i\,(i=1,\ldots,k)$をつけることができる，を満たす集合であるとし，その全体を$\boldsymbol{X}$とする．このときk-STPは以下のようにも定式化することができる．

$$(\mathbf{P})\qquad \min \quad \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} \tag{5}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in S}\sum_{j\in \overline{S}} x_{ij}\geq 1 \quad \forall S \tag{6}$$
$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X} \tag{7}$$

$(\mathbf{P})$から(6)を除去した緩和問題の最適解はGLBにより得ることができる．しかも，この最適解は整数解になっていることに注意する．ここでは制約式(6)をラグランジュ緩和することにより，さらに下界値の改善を試みる．

3.2　ラグランジュ緩和の適用

$(\mathbf{P})$の(6)式をラグランジュ緩和した問題

$$(\mathbf{L}(\mu))\qquad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} + \sum_{S}\mu_S\Big(1-\sum_{i\in S}\sum_{j\in\overline{S}} x_{ij}\Big) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X},\quad \mu_S\geq 0 \end{aligned}$$

を考える．$\mathbf{L}(\mu)$の整数最適解はGLBにより求められるが，(6)式を緩和しているため一般に連結性を満足しない．また(6)式は，完全グラフの場合$\sum_{l=1}^{k}({}_{|V|-1}C_{l-1})$本存在し，すべての制約式を一度に目的関数に組み込むことは難しい．したがって，本研究ではこれらの制約式を切除平面法のように逐次加えながら，ラグランジュ乗数も更新していく方法を提案する．

3.3 カット及びラグランジュ乗数の更新

$\mathbf{L}(\mu)$ を解いた解が非連結であるとき，図1のように，根を含む木で張られる点集合 S_t と，S_t の補集合 $\overline{S_t}(=V\setminus S_t)$ との間にカット $(S_t,\overline{S_t})$ が定義できる．このカットに対してラグランジュ乗数 μ_{S_t} を掛けて目的関数に組み込み，GLB を適用して問題 $\mathbf{L}(\mu)$ を解くことを繰り返す．ここで t は，t 回目の繰り返しを示している．この繰り返しの途中で，**実行可能性**及び**相補性**の両方が満たされたとき，k-STP の最適解が求められたことになる．また，実行可能性だけが満足されたときでも，よりよい上界値が得られる可能性が高い．

ラグランジュ乗数の更新方法として，劣勾配法[1]を適用する．劣勾配法における勾配ベクトルは t 回目における $\mathbf{L}(\mu)$ の解と，カット $(S_l,\overline{S_l})(l=1,\ldots,t-1)$ との積集合により定める．またステップ幅 θ_t は，t 回目の $\mathbf{L}(\mu)$ の目的関数値 LLB_t，上界値 UB に対し
$\theta_t=\lambda_t(UB-LLB_t)\ /\ \sum_{l=1}^{t}(1-\sum_{i\in S_l}\sum_{j\in\overline{S_l}}x_{ij})^2$
によって定める．アルゴリズムの概要を図2に示す．

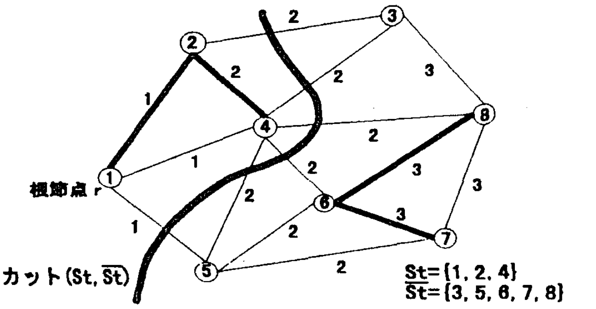

図 1: カット $(S_t,\overline{S_t})$(枝についている数値は歩数)

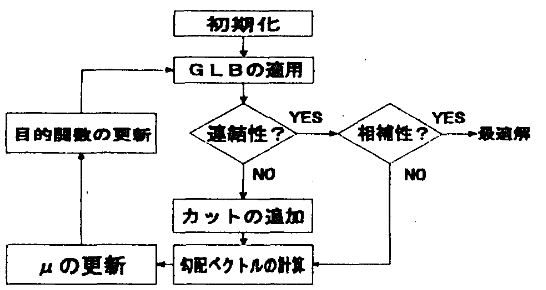

図 2: ラグランジュ緩和を用いたアルゴリズム

4 計算機実験

本研究で提案する手法に対し，C言語でプログラムを作成し計算機実験を行う．実験は問題のサイズによる違い，k の値による違い，グラフの形状による違い，加えるカットによる上下界値の変化など様々な視点で行うことができる．

これらのうち，図3には，節点数 n を30，k の値を15，枝のコストを1～1000の一様乱数としたランダムグラフを用いた結果を示している．この実験では，完全グラフに対する枝の密度を10%，50%，90%とした3種類のグラフを準備し，加えたカットの数による上下界値の変化の様子を示している．値は100回の試行の平均値であり，初期上界値をHUB，本研究により得られた下界値をLLB，上界値をLUBとして，横軸にカットの本数を，左縦軸にHUBに対するLLBの割合，右縦軸にHUBに対するLUBの割合をとっている．

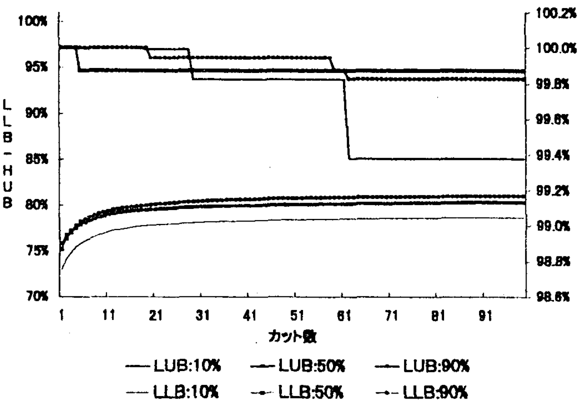

図 3: 実験結果 $(n=30,k=15,\lambda_t=0.1:$ 固定)

この結果，下界値は片岡，星崎ら[2, 3]のGLB(カット数0に相当)に対し，5～10%程の改善をみることができた．上界値についても，繰り返しの途中で何度か改善がみられることが分かった．また，GLBは極めて高速に解けるので，カット数が増えても計算時間に大きな影響はない．この他の実験結果については当日報告する．

5 問題点と今後の課題

本研究では，膨大な数の不等式制約に対し，カットを切除平面法のように逐次加え同時にラグランジュ乗数も更新するという手法により，k-STP に対して上下界値を改善することに成功した，しかしながら，異なる繰り返し t', t'' に対して同じカット $(S_{t'}=S_{t''})$ が生成され，それらに対して異なるラグランジュ乗数 $(\mu_{S_{t'}}\neq\mu_{S_{t''}})$ が付与されることもあり，このような場合，相補性を満足する可能性が減少する．

今後は上記の点を改善して，重複するカットを加えることなく適切なラグランジュ乗数を決定して相補性を満足する可能性を高め，より早く良好な上下界値を得ることが望まれる．

参考文献

[1] Ahuja, *et al.* : NETWORK FLOWS:Theory, algorithms, and applications, Prentice Hall(1993).

[2] 片岡ら，1995年日本OR学会春季研究発表会,2-D-9.

[3] 星崎ら，1996年日本OR学会春季研究発表会,1-B-9.