ファジィランダム・ミニマムスパニングツリー問題

02102914　大阪大学　*片桐　英樹　KATAGIRI Hideki
01005194　大阪大学　石井　博昭　ISHII Hiroaki

1　はじめに

ネットワークにおける応用上重要な問題の一つとしてスパニングツリー問題がある。そのうち、枝のコストの和を最小にする問題をミニマム・スパニングツリー問題といい、コストが確率変数で与えられている場合については、H.Ishiiらによって研究されている [1][2]。また、コストが可能性変数で表される場合における解法は伊藤らによって示されている [3]。

しかし、現実にはコストが確率的に変動する場合でもその実現値を完全に知る事が出来ない場合もある。この場合コストは情報としてランダム性と同時にファジィ性も併せ持つことになる。本研究では、このような確率とファジィの両性質をもつ要素をファジィランダム変数で表し、確率計画法における機会制約条件計画問題として定式化する。すなわち、目的関数に対するファジィ目標を設定し、その可能性測度を最大化するスパニングツリーを多項式時間で求める方法を提案する。

2　ファジィランダム変数

ファジィランダム変数はKwakernaakによって導入され [4]、その後、Puri と Ralescu は別の定義を与えると共に理論的な土台を構築した [5]。定義には様々なものがあるが、N.Watanabe は包括的な定義をファジイランダム変数になるための十分条件の形で与えた [6]。本研究ではこの定義を用いることにする。

定義 1 [6]
Ω を標本空間、Λをファジィ集合、B_Ω, B_Λ を $\sigma-$集合体、P を確率測度とする。さらに (Ω, B_Ω, P), (Λ, B_Λ) をそれぞれ確率空間、可測空間とするとき、Ω からΛへの可測写像 Xをファジイランダム変数という。

定義１の十分条件にあたる定理から次の補題が導かれる [6]。

補題 2 [6]
X をΩ からΛへの写像とする。$\forall\omega \in \Omega$に対して，ファジイ集合 $X(\omega)$ のメンバーシップ関数 $\mu_{X(\omega)}$ がある関数 $f(u;\theta)$ に対して$\mu_{X(\omega)}(u) = f(u; x(\omega))$ と表されるとする。ここでθに関して $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき $f(u;\theta_1) \neq f(u;\theta_2)$ が成り立つならば X はファジイランダム変数である。

3　定式化

$G = (N, E)$ を点集合 $N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ と枝集合 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subset N \times N$からなる無向グラフとし、$e_i$にはコスト c_iが設定されているものとする。G におけるスパニングツリー $T = T(N, S)$ は $S \subseteq E$かつ閉路を含まない連結部分グラフである。

Tは次のように 0－1 変数の $x_1, x_2, \ldots, x_m$ で表すことができる。

$$T: \quad x_i = 1 \quad e_i \in S$$
$$\quad\quad x_i = 0 \quad e_i \notin S$$

Xを $T(N, S)$ に対応する 0－1 ベクトルの集合とし、X をスパニングツリーの集合とみなす。このとき、ミニマムスパニングツリー問題は以下のように定式化される。

$$P_1: \quad \textit{maximize} \;\; \mathbf{cx}$$
$$\quad\quad \textit{subject to} \;\; x \in X$$

本研究ではコスト c_iを次のようなメンバーシップ関数をもつ可能性分布$\mu_{C_i(\omega)}$で制限されるファジィランダム変数と仮定する。

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i) = \max\left\{ L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\alpha_i}\right),\ 0\right\}$$

ここで型関数 L は $\mathbf{R} \to [0,\ 1]$ である単調非増加関数で $L(x) = L(-x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ かつ $L(0) = 1$ を満たすとする。$d_i(\omega)$ は平均μ_i, 分散共分散行列 Vをもつ多変量正規分布に従う確率変数とする。すなわち、可能性変数において中心が確率変数になっている場合であり、$d_i(\omega)$ に伴って$\mu_{C_i(\omega)}(c_i)$ も確率変数になる。$\mu_{C_i(\omega)}$は補題２の条件を満たしている。

$y = \mathbf{cx}$ とすると拡張原理により、

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \max\left\{ L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{m} d_i(\omega)x_i}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i}\right), 0\right\}$$

次に目的関数値にファジィ目標 G「$Y(\omega)$ がだいたい f_1以下である」を設け、ここで最適化基準となる可能性測度を次のように定義する。

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) = \sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\}$$

$\Pi_{Y(\omega)}(\cdot)$ は$\mu_{Y(\omega)}$に伴って確率変数となる。従って、P_1の意思決定法として、確率計画法における機会制約条件計画を用いて、以下に示すような「可能性測度最大化モデル」 P_2 を提案する。

$$P_2: \quad \textit{maximize} \;\; h$$
$$\quad\quad \textit{subject to} \;\; Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq \alpha$$
$$\quad\quad\quad\quad 0 \leq h \leq 1,\ \mathbf{x} \in X$$

である。ここで確率レベルαは一定とし、$\alpha > \frac{1}{2}$とする。$\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$ は

$$\sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\} \geq h$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \mu_G^*(h)$$

より、P_2は次のP_3のように変形される。

P_3 :
maximize h
subject to

$$Pr\left(\sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \mu_G^*(h)\right) \geq \alpha$$
$$0 \leq h \leq 1,\ \mathbf{x} \in X$$

ただし、$\mu_G(\cdot)$ は上半連続で非増加とし

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup\{r \mid L(r) > h, r \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases}$$

$$\mu_G^*(h) = \begin{cases} \sup\{r \mid \mu_G(r) \geq h\} & (0 \leq h \leq 1) \\ \sup\{r \mid \mu_G(r) > h\} & (h = 0) \end{cases}$$

となる。正規分布の性質から

$$\frac{\sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - \sum_{i=1}^m \mu_i x_i}{\sqrt{\mathbf{x}^t V \mathbf{x}}}$$

は標準正規分布 N(0,1) に従うので K_αをα分位点とすると次のような等価確定条件に変換される。

$$\sum_{i=1}^m \mu_i x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + K_\alpha\sqrt{\mathbf{x}^t V \mathbf{x}} - \mu_G^*(h) \leq 0$$

となる。ゆえに次のP_4のようになる。

P_4 :
maximize h
subject to

$$\sum_{i=1}^m \mu_i x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + K_\alpha\sqrt{\mathbf{x}^t V \mathbf{x}} \leq \mu_G^*(h)$$
$$0 \leq h \leq 1,\ \mathbf{x} \in X$$

ここで、

$$z(\mathbf{x}, h) \equiv \sum_{i=1}^m \mu_i x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + K_\alpha\sqrt{\mathbf{x}^t V \mathbf{x}} - \mu_G^*(h)$$

とおくと $z(\mathbf{x},\ h)$ は h の増加関数であるから $z(\mathbf{x}, h) \geq 0$ が成り立つ条件の下で最大の h とその時のスパニングツリーを求めればよい。そこで Vを対角行列としたうえで２目的問題

$$\min_{\mathbf{x}\in X}(\mu_i x_i - L^*(h)\alpha_i x_i, \beta_i x_i)$$

を考える。

$$f(\mathbf{x}, h) \equiv \sum_{i=1}^m (\mu_i - L^*(h)\alpha_i + \lambda\beta_i^2)x_i$$

とおくと、$f(\mathbf{x}, h)$ を最小化する問題は２目的問題の非劣解を与え、P_4の最適解はこの２目的問題の非劣解の集合に含まれる。さらに係数部分を

$$y_i = \mu_i - L^*(h)\alpha_i + \beta_i\lambda$$

とおく。２目的問題の非劣解を求めるには、ミニマムスパニングツリーを求めるアルゴリズムを考慮に入れると，y_iの順序が入れ替わるところを全て調べれば十分であることがわかる。ただし、λは非負である。y_iを傾きβ_i, y切片$\mu_i - L^*(h)\alpha_i$の直線と見ると h 一定のときには Gusfield により非劣解の数は高々$O(m\sqrt{n})$ であることが示されている [7]。ここで $m,\ n$ はそれぞれグラフにおける枝、点の数である。しかし、$h \in [0,\ 1]$ であるため、そのまま適用することは出来ないが、次の定理が成り立つ。

定理 3 *2*目的スパニングツリー問題の非劣解の数はせいぜい $O(m^4)$ である。

上の定理を証明するために次の性質を証明する。

性質 4 異なる２直線の交点のλ座標の順序が一定ならば現れる y_iの順序の集合は一意に決まる。

4　おわりに

問題を多項式時間で解くアルゴリズムおよび定理、性質などの詳細については当日の発表で述べる予定である。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究 (c)(2)10680428 によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] H.Ishii and S.Shiode, "Chance constrained spanning tree problem", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **24** (1981) 147-157.

[2] H.Ishii, S.Shiode and T.Nishida, "Stochastic spanning tree problem", *Discrete Applied Mathematics* **3** (1981) 263-273.

[3] 伊藤健, 石井博昭, "必然性測度に基づくファジィ・スパニングツリー問題の一解法", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **39** (1996) 247-257.

[4] H.Kwakernaak, "Fuzzy random variable-1. Definitions and theorems", *Information Sciences* **15** (1978) 1-29.

[5] M.L.Puri and D.A.Ralescu, "Fuzzy random variables ", *Journal of Mathmatical Analysis & Application.* **114** (1986) 409-422.

[6] N.Watanabe, "Fuzzy Random Variables and Statistical Inference ", 日本ファジイ学会誌 **8** (1996) 126-135.

[7] D.Gusfield, "Sensitivity Analysis for Combinatorial Optimization", University of California at Berkeley, California. PhD Thesis (1980) 58-62.