一様な直線を介して4次元を2次元からみる

01102840　筑波大学　腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

1. はじめに

最近，筆者は都市空間を移動の面から分析することが重要であると論じている．中でも以下の二つを基本的なものとして取り上げてきた．一つは距離分布と呼んでいるもので，これは与えられた空間のあらゆる2地点の移動を前提とした距離の全体分布ということになる．数式で表現すれば与えられた空間のすべての平面の任意の2地点を$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$（ともにベクトル）とし，その距離を$D(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$で表示すれば，距離$r$以下の2地点のペアーの量$F(r)$は

$$F(r) \;=\; \iint_{D(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)<r} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \qquad (1)$$

と表現できる．ここでいう「距離分布」とは上記$F(r)$をrで微分した

$$f(r) \;=\; \frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r} \qquad (2)$$

をさすものとする．すなわちこれは距離が丁度rの2地点ペアーの量を密度（4次元量を距離で割ったもの）で表現したものということができる．

次にあらゆる2地点のペアの移動の重なりともいうべきものを考え，ここでは通過量分布と呼ぶことにするが，この量が多い地点では潜在的に実際の交通混雑も起こりやすいと考えられる．数式で表現すれば任意の2点$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$間の平面上の移動（往復）を$P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$と表わすと，地点$\boldsymbol{x}$を通る移動の総量は

$$F(\boldsymbol{x}) \;=\; \iint_{\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \qquad (3)$$

と表わすことができ，これを平面の「通過量分布」と呼ぶことにする．

2. 平面の2点と直線上の2点

もしも前述の平面が次元のおちた線分であれば1次元空間における2点は2次元空間における1点と考えられ，これによって結果の導出は比較的簡単である(文献[1])．前章の平面上の2点は同じような考え方でいけば4次元空間の1点に対応させて考えることが出来る．しかし我々は4次元空間を認識出来ないため，平面における距離分布や通過量の計算は，1次元における計算よりも見通しをたてづらい．そこで様々な特殊な工夫例えばCroftonの微分方程式より前章の式(2)等が計算できるのである(文献[2])．

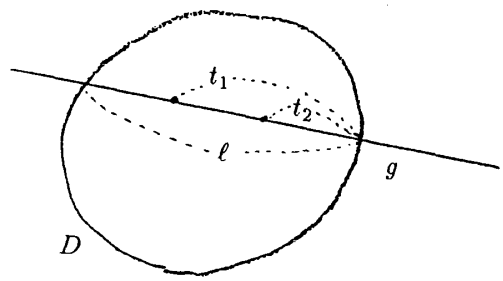

図 1: 一様な直線とその上の2点

しかしこれでは円というやさしい図形でしか距離分布や通過量分布を議論することは出来なくなる．そこで一般的図形すなわち画数の多い多角形でもこれらが議論できるように認識できない4次元に対して，認識できるような道具を探さなければならない．

ところで積分幾何学の分野でCroftonが導いた公式の拡張を議論するとき次のような変数変換が用いられる．すなわちそれは平面領域Dの2点$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$に関する積分は図1のようにこの領域$D$を通る一様な直線$g$を固定したとき，この直線上の2点$t_1, t_2$で

$$[\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2] = |t_1 - t_2|[\mathrm{d}G, \mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2] \qquad (4)$$

と考えることが出来る，というものである．これを用いれば2次元上の2点を，一様な直線ごとにこの直線上の2点で2点間の距離の重みを入れて考えていけばよいことになる(文献[3])．

そこでまず領域Dを通るある直線を固定し，この直線上の領域内での距離の累積分布を$F_g(r)$とすれば，この固定された直線のこの領域Dの内部の長さをℓとして

$$F_g(r) \;=\; \iint_{|t_1-t_2|<r} |t_1 - t_2| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$$

$$= \quad r^2\ell - \frac{2}{3}r^3 \qquad (5)$$

が導かれる．これをrで微分すればこの固定された直線上の距離の分布が

$$f_g(r) = 2r(\ell - r) \qquad (6)$$

と得られる．これを領域Dを通る一様な直線で積分してやればこの領域D内の2点間の距離の分布を出すことが出来る．

次に通過量分布について議論しよう．この場合も前述の距離分布と同じように直線を固定して考えることにする．すると式(4)より直線上の点xを通る通過量$F_g(x)$は

$$\begin{aligned} F_g(x) &= \iint_{t_1<x<t_2, t_2<x<t_1} |t_1 - t_2|\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\ &= \ell x(\ell - x) \end{aligned} \qquad (7)$$

と計算できる．

3. 距離分布の計算

図1において，一様な直線のこの領域内での長さℓがrよりも大きい直線の集合をG_rで表せば，前章の式(6)をこの範囲で積分してやれば，距離分布$f(r)$を

$$f(r) = \int_{G_r} 2r(\ell - r)\mathrm{d}G, \ G_r = \{G|r < \ell\} \qquad (8)$$

と求めることが出来る．長さℓもGの関数なので上式はそれほど簡単ではないが領域Dが半径αの円の時は，途中の議論は省略するが比較的容易に

$$f(r) = \int_r^{2\alpha} 2r(\ell - r)\frac{\pi\ell}{\sqrt{4\alpha^2 - \ell^2}}\mathrm{d}\ell \qquad (9)$$

と書くことが出来る．そしてこれを計算すると円内の距離分布である

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos\frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2\sqrt{1 - (\frac{r}{2\alpha})^2} \qquad (10)$$

が得られ，Croftonの微分方程式で得られた結果と一致する．

そこで式(8)を利用して不定形における近似計算を考えよう．近似の程度を見るために半径αの円に一様な直線として図2のように3本g_1, g_2, g_3をとり，これらの直線の円内の長さℓ_iより式(6)で距離分布が得られる．そしてこの円を通過する直線の全体量$2\pi\alpha$の1/3の重みをつけてこれを図示すると図3のf_1, f_2, f_3のようになり，これを足し算すれば図3の$f^*(r)$が得られる．これを正しい式(10)の$f(r)$と比較すると，この近似はかなり良いことが分かるだろう．

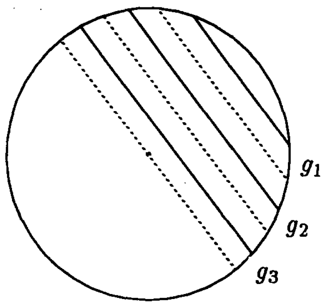

図 2: 円内の一様な3直線

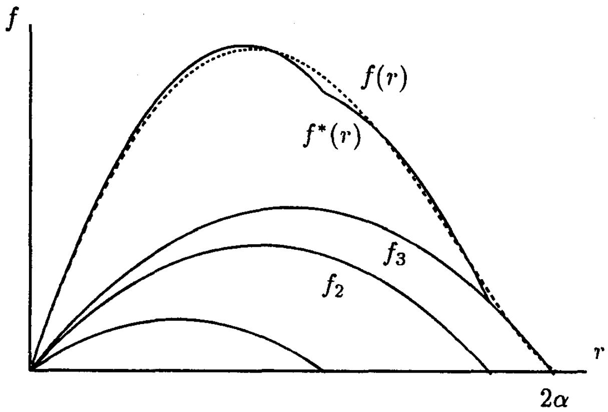

図 3: 距離分布の近似(破線が式(10))

4. おわりに

前章の結果は領域が円であるため，一様な直線については一つの角度について考えれば良かった．不定形については角度も考慮しなければならないので，もっと直線の本数を多くしなければならない．しかし一様な直線をもとにすれば近似計算がかなりの精度で出来ることは示せたと思われる．同様に式(7)を用いれば不定形における通過量についても計算が可能であるが紙面の都合もあるので割愛する．

参考文献

[1] 腰塚武志(1997)：移動からみたネットワークの分析．日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集，pp.252-253.

[2] 谷村秀彦，腰塚武志他(1986)：都市計画数理，朝倉書店．

[3] 腰塚武志(1976)：積分幾何学について(3)．オペレーションズ・リサーチ，11月号，pp.654-659.

[4] 腰塚武志(1992)：都市域の流動に関する理論的考察．日本都市計画学会学術研究論文集27号，pp.343-348.