

統計検定を用いた DEA の拡張と実証研究

01205520 東京理科大学 末吉 俊幸 SUEYOSHI Toshiyuki
 02502160 東京理科大学 *藤井 暢人 FUJII Nobuhito

【参考文献】Toshiyuki Sueyoshi, "DEA Non-parametric Ranking Test and Index Measurement : Slack-Adjusted DEA : An Application to Japanese Agriculture Cooperatives," Submitted for Publication in OMEGA.

1. はじめに

本研究では、DEA (Data Envelopment Analysis) による効率性測定と DEA の感度分析から求められる指標測定を組み合わせた、新しい DEA 統計検定法を提案する。

2. SA-DEA(Slack-Adjusted DEA)モデル

SA-DEA モデルの数学的な構造を述べるために、 n 個の DMU $j \in J \{j=1, 2, \dots, n\}$ が、 $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$ を使い $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T$ を生産しているとする。このとき、SA-DEA モデルは次のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \text{Min} \\ \eta_a &= \theta - \left\{ \left(\sum_{i=1}^m s_i^- / R_i^- \right) + \left(\sum_{r=1}^k s_r^+ / R_r^+ \right) \right\} / (m+k) \\ \text{s.t.} \quad & - \sum_{j \in J} x_{ij} \lambda_j + \theta x_{ia} - s_i^- = 0, \quad i=1, \dots, m, \\ & \sum_{j \in J} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ra}, \quad r=1, \dots, k, \quad (1) \\ & s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0, \theta: \text{制約無し}. \end{aligned}$$

ここで DEA 効率値は入出力に関する 2 つのスラックによって修正され、SA-DEA 効率値 η_a が測定される。また 2 つのスラックは次の数値によって修正される。

$$R_i^- = \max_j (x_{ij}), \quad R_r^+ = \max_j (y_{rj}).$$

3. ノンパラメトリック検定

ノンパラメトリック検定の帰無仮説 $H_0: f_1(\eta^*) = f_2(\eta^*)$ は 2 つのグループに分類された DMU 群が効率値に関して同じ分布を持つことを表す。次に以下の条件が成立するならば、帰無仮説は棄却される。

$$|W - \{n_1(n+1)\}/2| \geq Z_{\alpha/2} \sqrt{\{n_1 n_2 (n+1)\}/12}$$

ここで、 W は順位和、 Z は $\alpha\%$ の有意水準である。

4. 順位和検定に対する DEA 指標

4.1 定式化

a 番目の DMU を効率的とすると、DEA 指標 δ_a は次のように表現される。

$$\begin{aligned} & \text{Min} \\ \delta_a &= \theta - \left\{ \left(\sum_{i=1}^m s_i^- / R_i^- \right) + \left(\sum_{r=1}^k s_r^+ / R_r^+ \right) \right\} / (m+k) \\ \text{s.t.} \quad & - \sum_{j \in J-\{a\}} x_{ij} \lambda_j + \theta x_{ia} - s_i^- = 0, \quad i=1, \dots, m, \\ & \sum_{j \in J-\{a\}} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ra}, \quad r=1, \dots, k, \quad (2) \\ & s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0, \theta: \text{制約無し}. \end{aligned}$$

(2) 式の最適値は、(1) 式の最適値と等しいか、またはそれ以上になる。また、実行可能解を得るために RTS (Returns To Scale) は一定であると仮定する。

4.2 DEA 指標の視覚的描写

図 1 は、2 入力 1 出力である 10 個の DMU (A~J) について示したものである。今、A の入出力項目を A' に移動すると、効率的フロンティアが移動し、D, E が新たに効率的と判断され、これを基に A の DEA 指標の測定が可能となる。

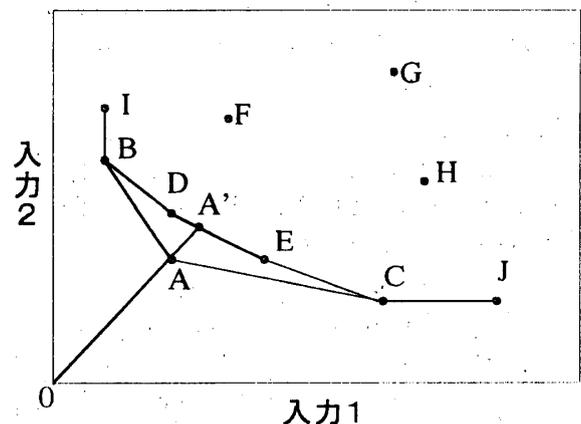


図 1 : DEA 指標の視覚的描写

ここで、A の DEA 指標は OA'/OA で測定され、 $\delta_a \geq \eta_a$ であることは効率的な DMU を表すので、DEA 指標は効率的な DMU の順位検定に役に立つ。

4.3 修正指標

DEA 指標は、値が 100%を超えてしまうため、適切な範囲に調整する必要がある。a 番目の DMU_a の指標を次のように定義する。

ARI (Adjusted Index Number) =

$$1 + \left[\frac{\delta_a^* - \min_{a \in E} \delta_a^*}{\max_{a \in E} \delta_a^* - \min_{a \in E} \delta_a^*} \right]$$

ARI により 100%を基準点として、非効率的な DMU の効率値は 0~100%, 効率的な DMU のそれは 100~200%で表される。

4.4 順位和検定の手順

DEA 順位和検定は、次の手順で行なわれる。

- (1) SA-DEA モデルを全ての DMU に適用し、効率的、非効率的な 2つのグループに分類する。
- (2) 効率的な DMU について、DEA 指標を求める。非効率的な DMU の DEA 効率値と DEA 指標は等しく、DEA 指標をもとに全ての DMU について順位付けを行なうことが可能である。
- (3) Wilcoxon 順位統計検定を全ての DMU について行ない、2つのグループが効率値に関して同じ分布を持つという帰無仮説についての検定を行なう。

5. 規模の経済性

RTS を使用すれば、DMU を 3つのグループに分類することができる。ここで、(1) 式の双対形をもとに次の式を考えると、RTS について考慮することが可能となる。

$$\begin{aligned} \text{Max/Min} \quad & \sigma \\ \text{s.t.} \quad & - \sum_{i=0}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^k w_r y_{rj} + \sigma \leq 0, \\ & \sum_{i=0}^m v_i x_{ij} = 1, \\ & \sum_{r=1}^k w_r y_{rj} + \sigma = \eta_a^*, \\ & v_i \geq 1 / \{(m+s)R_i^-\}, w_r \geq 1 / \{(m+s)R_r^+\}, \\ & \sigma: \text{制約無し} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\sigma}^*$ と $\underline{\sigma}^*$ はそれぞれ、(3) 式の最適値の上限と下限である。

ただし、以下のことが成り立つ。

- (1) RTS 増加型: $\bar{\sigma}^* > \underline{\sigma}^* \geq 0$ または $\bar{\sigma}^* = \underline{\sigma}^* > 0$,
- (2) RTS 一定型: $\bar{\sigma}^* > 0 > \underline{\sigma}^*$ または $\bar{\sigma}^* = \underline{\sigma}^* = 0$,
- (3) RTS 減少型: $0 > \bar{\sigma}^* > \underline{\sigma}^*$ または $\bar{\sigma}^* = \underline{\sigma}^* < 0$.

6. 実証研究 (農協 (JA) への適用)

6.1 農協のデータ

ここで、1997 年度の千葉県農業組合要覧データを紹介する。まず、JA の入力項目は、信用、金融、購買、販売/指導、その他の各部門に従事する職員数、及び事業管理費の 6 項目である。また出力項目は、信用事業総利益、共済事業総利益、購買事業総利益、販売事業総利益、他の利益の 5 項目である。

6.2 DEA 効率値

DEA 効率値、SA-DEA 効率値、SA-DEA モデルの双対変数を求める。これにより、次のことがわかる。

- (1) 効率的な DMU が多数出てくるので、それら全てに DEA 感度分析を行なう必要がある。
- (2) SA-DEA モデルのウェイトが全て値を持つ。

6.3 DEA 指標と RTS 測定

測定結果より、次のことがわかる。

- (1) DEA 指標を基に全ての効率的な DMU の順位付けを行なえた。
- (2) RTS 増加型の JA が 1, RTS 一定型が 16, 残りの 15 は RTS 減少型と判断された。RTS 減少型と判断された JA は、業務を拡張することにより、効率値の改善が可能となる。

6.4 ノンパラメトリック検定の結果

RTS 減少型のグループと RTS 増加・一定型のグループについて、帰無仮説の検定を行なう。Z 値は、

$$Z = [W - n_1(n+1)/2] / \sqrt{n_1 n_2 (n+1)/12} = -4.47$$

となる。この値により、有意水準 5%で帰無仮説が棄却される。よって、RTS 増加・一定型のグループが RTS 減少型のグループより優れていることがわかる。

7. 結論と展望

本研究では、Wilcoxon 順位統計検定と DEA 感度分析を関連付ける新たな分析手法を提案した。この手法によって、効率的な DMU に対しても順位付けを行なうことが可能となる。今後の研究の拡張として、本研究では効率値の関数形式を表現する仮定に正規分布が用いられているが、指数分布など他の分布を用いることがあげられる。また、効率的な DMU は DEA 指標を用いて順位付けを行なったが、その方法を用いず、順位和検定と容易に関連付けられる手法で順位付けを行なうことについても、将来さらなる研究の可能性が開かれている。