

スラック調整型 DEA を用いた時系列分析 -Part 1 理論研究-

01205520 東京理科大学 末吉 俊幸 SUEYOSHI Toshiyuki  
 01109680 電力中央研究所 後藤 美香 GOTO Mika  
 02004150 東京理科大学 奥山 茂 OKUYAMA Shigeru  
 02501910 東京理科大学 \*本間 隆嗣 HONMA Takashi  
 02004240 東京理科大学 青木 真吾 AOKI Shingo

1 はじめに

本研究は、時系列分析のための理論的フレームワークを持った DEA(Data Envelopment Analysis)を提案する。本研究の焦点は、動的な時間シフトを考慮した場合の3つの効率性と4つの指標測定のための分析的関係にある。この研究では SE(Scale Efficiency)と RTS>Returns To Scale)の測定を行うための理論的根拠を拡張する。

2 DEA 時系列分析のための経済概念

DEA 時系列分析を行うための基本的な経済概念を視覚的に表わしたものが図1である。図1は、生産過程が2つの異なる期間において観察される産業を示す。b期(基準期間)と任意のt期が2つの期間であり、 $t=b+p$ とpが時間間隔を示す。b期における最もよいパフォーマンスを表現する効率性フロンティアは、 $A_b$ - $B_b$ - $C_b$ - $D_b$ によって示される。RTS 一定の仮定のもとで、フロンティアは視覚的になめらかな曲線(B-B)によって表わされる。図では、b期の生産可能集合は、それぞれの効率性フロンティアから右上の領域に位置する。

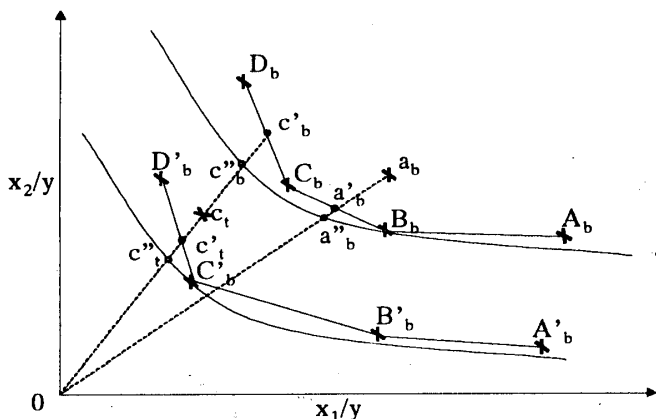


図1 効率値と指標測定

従来の研究に従い、本研究においても視覚的に図1における2つの期間の経済概念を次のように定義できる。

- (a)  $TE_b$ (b期の Technical Efficiency) =  $Oa_b/Oa_b$
- (b)  $TSE_b$ (b期の Technical and Scale Efficiency) =  $Oa_b/Oa_b$
- (c)  $TE_t$ (t期の Technical Efficiency) =  $Oa'_t/Oa'_t$
- (d)  $TSE_t$ (t期の Technical and Scale Efficiency) =  $Oa'_t/Oa'_t$
- (e)  $SE_b$ (b期の Scale Efficiency) =  $Oa_b/Oa_b = TSE_b/TE_b$
- (f)  $SE_t$ (t期の Scale Efficiency) =  $Oc_t/Oc_t = TSE_t/TE_t$

- (g)  $PGI_t^b$  (Production Growth Index) =  $Oc_b/Oc_t$
- (h)  $PGSI_t^b$  (Production Growth and Scale Index) =  $Oc_b/Oc_t$
- (i)  $FSI_t^b$  (Frontier Shift Index) =  $Oc_b/Oc_t = PGI_t^b / TE_t$
- (j)  $FSSI_t^b$  (Frontier Shift and Scale Index) =  $Oc_b/Oc_t = PGSI_t^b / TSE_t = PGSI_t^b / (TE_t \cdot SE_t)$

3 スラック調整型 DEA モデル

n 個の評価対象  $DMU_j(j=1, \dots, n)$ , k 個の出力 ( $y_{rj}, r=1, \dots, k$ )と m 個の入力 ( $x_{ij}, i=1, \dots, m$ )が存在するとき、SA-DEA 入力モデルは以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && 0 - \left\{ \left( \sum_{i=1}^m s_i^- / R_i^- \right) + \left( \sum_{r=1}^k s_r^+ / R_r^+ \right) \right\} / (m+k) \\ & \text{subject to} && - \sum_{j \in J} x_{ij} \lambda_j + \theta x_{ia} - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && \sum_{j \in J} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = 0, \quad r = 1, \dots, k \\ & && lb \leq \sum_{j \in J} \lambda_j \leq ub \\ & && \theta: \text{free}, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \text{ and } \lambda_j \geq 0 \\ & && R_i^- = \max_j (x_{ij}) \quad i = 1, \dots, m \\ & && R_r^+ = \max_j (y_{rj}) \quad r = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、従来の DEA 効率値 $\theta$ は、入力と出力に関係した2つのスラック( $s_i^-, s_r^+$ )によって調整される。上限(ub)と下限(lb)によって制約されている $\lambda_j$ のグループは、全てのデータの点を結合するのに用いられる。入力及び出力に関するスラックは、それぞれのデータの範囲によって調整される。

a 番目の  $DMU_a$  に関する SA-DEA 入力モデルの効率レベル( $\delta_a$ )はモデル(1)の最適解からの次の(2)によって測定される。

$$\delta_a = \theta^* - \left\{ \left( \sum_{i=1}^m s_i^- / R_i^- \right) + \left( \sum_{r=1}^k s_r^+ / R_r^+ \right) \right\} / (m+k) \tag{2}$$

(1)式の双対形は以下のように定式化される

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{r=1}^k w_r y_{ra} + \sigma_1 lb - \sigma_2 ub \\ & \text{subject to} && - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^k w_r y_{rj} + \sigma_1 lb - \sigma_2 ub \leq 0 \quad j \in J \\ & && \sum_{i=1}^m v_i x_{ia} = 1 \\ & && v_i \geq 1 / \{ (m+k) R_i^- \} \text{ and } w_r \geq 1 / \{ (m+k) R_r^+ \} \end{aligned} \tag{3}$$

## 4 RTS の測定

### 4.1 複数解の発生

RTS はある特定の DMU 上を通る支持超平面の一つの定数によって決められる。DEA/RTS の問題は  $\sigma$  に複数解が発生することである。本研究では相補スラック条件(CSC)を利用して、いつ複数解が発生するのかを判定する方法を提案する。さらに、複数解が存在する時の処理方法を提案する。

### 4.2 いつ複数解が発生するか

相補スラック条件(CSC)により、次のような提案が得られる。

#### 提案

モデル(1)を用いて、a 番目の DMU<sub>a</sub> の効率性を測定し、次のような数値を計測する。

$$\begin{aligned} \#(RF_a) &= \text{the number of } \{j \in J | \lambda_j^* > 0 \text{ in (1)}\} \\ \#(S_a^{*-}) &= \text{the number of } \{i | s_i^{*-} > 0 \text{ in (1)}\} \\ \#(S_a^{*+}) &= \text{the number of } \{r | s_r^{*+} > 0 \text{ in (1)}\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、最適性条件としてモデルが満たす制約式の数と、DEA 乗数の数との関係から、複数解発生の可能性について以下に示す3つのケースが考えられる。

- (a)  $m+k+1 > \#(RF_a) + 1 + \#(S_a^{*-}) + \#(S_a^{*+})$  ならば、複数解がいくつかの乗数に発生する。  
 (b)  $m+k+1 = \#(RF_a) + 1 + \#(S_a^{*-}) + \#(S_a^{*+})$  ならば、ユニーク解が全ての乗数に発生する。  
 (c)  $m+k+1 < \#(RF_a) + 1 + \#(S_a^{*-}) + \#(S_a^{*+})$  ならば、乗数に解がない。

### 4.3 複数解の扱い方

RTS 評価を行うために、本研究は次のような3ステップを用いる。

#### Step 1

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{r=1}^k w_r y_{ra} + \sigma_1 - \sigma_2 \\ \text{subject to} \quad & - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^k w_r y_{rj} + \sigma_1 - \sigma_2 \leq 0 \quad j \in J \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ia} = 1 \\ & v_i \geq 1 / \{(m+k)R_i^-\}, w_r \geq 1 / \{(m+k)R_r^+\}, \sigma_1 \geq 0 \text{ and } \sigma_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$\delta_a = \sum_{r=1}^k w_r y_{ra} + \sigma_1 - \sigma_2$  がモデル(6)の最適解である。

次に、 $\sigma (= \sigma_1 - \sigma_2)$  の上限値と下限値はそれぞれ次のようなモデルによって決定される。

#### Step 2

$$\begin{aligned} \text{maximize/minimize} \quad & \sigma_1 - \sigma_2 \\ \text{subject to} \quad & - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^k w_r y_{rj} + \sigma_1 - \sigma_2 \leq 0 \quad j \in J \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ia} = 1 \\ & \sum_{r=1}^k w_r y_{ra} + \sigma_1 - \sigma_2 = \delta_a \\ & v_i \geq 1 / \{(m+k)R_i^-\}, w_r \geq 1 / \{(m+k)R_r^+\}, \sigma_1 \geq 0 \text{ and } \sigma_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$\bar{\sigma} (= \sigma_1^* - \sigma_2^*)$  と  $\underline{\sigma} (= \sigma_1^* - \sigma_2^*)$  を、モデル(7)を最適化することによって測定された上限値と下限値とし、RTS のタイプを次のように3つに分類する。

#### Step 3

- (a) RTS 増加型  $\Leftrightarrow \bar{\sigma} > \underline{\sigma} \geq 0$  or  $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} > 0$   
 (b) RTS 一定型  $\Leftrightarrow \bar{\sigma} > 0 > \underline{\sigma}$  or  $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = 0$   
 (c) RTS 減少型  $\Leftrightarrow 0 > \bar{\sigma} > \underline{\sigma}$  or  $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} < 0$

## 5 時系列分析のための DEA : 指標測定

入力指向 SA-DEA モデル(1)を時系列的なフレームワークへと再定式化する。図1で示される生産過程を考える場合、本研究では、t期のc番目のDMUのパフォーマンスがベース期(b)のDMU( $J_b$ )のパフォーマンスと比べることによって測定される。この式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \theta - \left\{ \sum_{i=1}^m s_i^- / R_i^- + \sum_{r=1}^k s_r^+ / R_r^+ \right\} / (m+k) \\ \text{subject to} \quad & - \sum_{j \in J} x_{ij} \lambda_j + \theta x_{ic} - s_i^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j \in J_b} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rc} \quad r = 1, \dots, k \\ & lb \leq \sum_{j \in J_b} \lambda_j \leq ub \\ & \theta : \text{free}, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \text{ and } \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

最適解は次の(9)式で表わされる。

$$\delta_c = \theta^* - \left\{ \sum_{i=1}^m s_i^{*-} / R_i^- + \sum_{r=1}^k s_r^{*+} / R_r^+ \right\} / (m+k) \quad (9)$$

ここで、 $R_i^-$  と  $R_r^+$  は t 期のデータから測定される。PGI<sub>t</sub><sup>b</sup> と PGSI<sub>t</sub><sup>b</sup> が計測される2つの指標尺度である。モデル(9)において、 $lb=ub=1$  とすると  $\delta_c$  は PGI<sub>t</sub><sup>b</sup> を示し、 $lb=0, ub=\infty$  とすると  $\delta_c$  は PGSI<sub>t</sub><sup>b</sup> を示す。後者は RTS 一定の仮定の下で計測されるが、前者はその仮定に依存しない。

## 6 総括 - 結論と研究展望 -

本研究は、DEA による効率性計測を時系列分析へと拡張するための理論的根拠を持つ入力ベース SA-DEA モデルを提案した。この研究の重要な成果は、3つの効率性(TE, TSE, SE)と4つの指標尺度(PGI, PGSI, FSI, FSSI)の間の分析的な関係の説明にある。今後の展望として、コストベースのDEAによる効率性及びRTS測定を行う必要がある。

#### 参考文献

- [1] Sueyoshi, T. "Divestiture of Nippon Telegraph and Telephone," *Management Science*, 42, 1326-1351. (1996)  
 [2] Sueyoshi, T. "Measuring efficiencies and returns to scale of Nippon Telegraph & Telephone in production and cost analysis," *Management Science*, 43, 779-796. (1997)