1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

最大リーフ全域木問題について

02501520　東京工業大学　藤江 哲也　FUJIE Tetsuya

1　はじめに

最大リーフ全域木問題 (Maximum Leaves Spanning Tree Problem : MLSTP) とは，連結無向グラフ $G=(V,E)$ の全域木の中で，リーフ (次数 1 の頂点) 数が最大のものを求める問題である．MLSTP は NP-hard であり [2]，MAX-SNP hard であることも知られている [1]．また，いくつかの近似解法が [3, 4] で与えられている．本稿では，MLSTP の定式化を行い，各制約式が MLSTP から定義される多面体のファセットを定める条件を与える．最後に緩和問題について触れる．

2　緒定義

$S \subseteq V$に対して $E(S) \equiv \{(i,j) \in E \mid i,j \in S\}$，$G[S] \equiv (S, E(S))$，$G \setminus S \equiv G[V \setminus S]$．$F \subseteq E$に対して$\boldsymbol{x}(F) \equiv \sum_{e \in F} x_e$．$i \in V$に対して$\delta(i) \equiv \{(i,j) \in E \mid j \in V \setminus \{i\}\}$．$e \in E$に対して $G - e \equiv (V, E \setminus \{e\})$ とする．

G は連結だが $G \setminus \{i\}$ が非連結となるとき，$i \in V$ をカット頂点 (切断点，関節点) とよぶ．また，G がカット頂点を持たないとき，G は 2 連結である，という．

3　結果

3.1　定式化

MLSTP は，G の全域木 $T \subseteq E$ に対し，変数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \{0,1\}^{|E|} \times \{0,1\}^{|V|}$ を

- $x_e = 1 \iff e \in T$
- $y_i = 1 \implies i$ は T のリーフ

と定めると，以下のように定式化される:

$$
\begin{array}{lllr}
\text{Maximize} & \sum_{i \in V} y_i & & (1) \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x}(E) = |V| - 1, & & (2) \\
& \boldsymbol{x}(E(S)) \leq |S| - 1 & (S \subset V \text{ and } |S| \geq 2), & (3) \\
& \boldsymbol{x}(\delta(i)) + (|\delta(i)| - 1) y_i \leq |\delta(i)| & (i \in V), & (4) \\
& x_e \geq 0 & (e \in E), & (5) \\
& y_i \geq 0 & (i \in V), & (6) \\
& x_e \ : \ \text{整数} & (e \in E), & (7) \\
& y_i \ : \ \text{整数} & (i \in V). & (8)
\end{array}
$$

次節では，(3) ～ (6) の各式が，多面体

$$P \equiv conv\Big(\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R^E \times R^V \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ は } (2) \sim (8) \text{ を満たす }\}\Big)$$

のファセットを定めるための条件を与える．以下では，一般性を失うことなく，G を 2 連結グラフと仮定する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3.2 ファセット

補題 3.1 P の *affine hull* は $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in R^{|E|} \times R^{|V|} \mid \boldsymbol{x}(E) = |V|-1\}$ で与えられる. ■

系 3.2 $dim(P) = |V| + |E| - 1$. ■

補題 3.3 $x_e \geq 0$ が P のファセットを定める必要十分条件は, $G-e$ が 2 連結グラフとなることである. ■

補題 3.4 任意の $i \in V$ について $y_i \geq 0$ は P のファセットを定める. ■

補題 3.5 $\boldsymbol{x}(E(S)) \leq |S|-1$ が P のファセットを定める必要十分条件は,

(i–1) $|S| \geq 3$ のとき $G[S]$ は 2 連結;

(i–2) $|S| = 2$ のとき $G[S]$ は連結;

(ii) $G \setminus S$ は連結. ■

次の補題は (4) 式の一般化である.

補題 3.6 $i \in V$, $F \subseteq \delta(i)$ を $|F| \geq 2$ とする. このとき

$$\boldsymbol{x}(F) + (|F|-1)y_i \leq |F| \tag{9}$$

は P の妥当不等式である. ■

定理 3.7 $i \in V$, $F \subseteq \delta(i)$ を $|F| \geq 2$ とする. このとき (9) 式が P のファセットを定める必要十分条件は, F のどの枝も $G \setminus \{i\}$ のカット頂点と隣接していないことである. ■

系 3.8 $|\delta(i)| = 2$ ならば, (4) 式は P のファセットを定める. ■

3.3 緩和問題

(1) ~ (7) で定義される問題, すなわち $\boldsymbol{y}$ の整数性を外した問題は次のような全域木問題になる:

$$\begin{aligned}\text{Maximize} \quad & \sum_{i \in V} \frac{d_i - \boldsymbol{x}(\delta(i))}{d_i - 1} \\ & = \sum_{i \in V} \frac{d_i}{d_i - 1} - \sum_{e=(i,j) \in E} \left(\frac{1}{d_i - 1} + \frac{1}{d_j - 1} \right) x_e \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \ : \ \text{全域木}, \end{aligned}$$

ただし $d_i = |\delta(i)|$. これは (4) に関するラグランジュ緩和問題と一致することが示される. 現在, この緩和問題を用いた厳密解法を検討中である.

参考文献

[1] G. Galbiati, F. Maffioli and A. Morzenti, "A Short Note on the Approximability of the Maximum Leaves Spanning Tree Problem," *Information Processing Letters* **52** (1994) 45–49.

[2] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* (Freeman, New York, 1979).

[3] Hsueh-I Lu and R. Ravi, "The Power of Local Optimization: Approximation Algorithms for Maximum-Leaf Spanning Tree," *Thirtieth Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing* (1992) 533–542.

[4] Hsueh-I Lu and R. Ravi, "A Near-linear-time Approximation Algorithm for Maximum-leaf Spanning Trees," Tech Report CS96–06, Department of Computer Science, Brown University (1996).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.