1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

in-トーナメントグラフ上のハミルトン閉路を求める並列アルゴリズム

02401223 徳島大学 *中山慎一 NAKAYAMA Shin-ichi
01603863 豊橋技術科学大学 増山 繁 MASUYAMA Shigeru

1 はじめに

有限集合Vとその直積集合$V \times V$の部分集合Aの組$D = (V, A)$を有向グラフといい, $V = V(D)$の元をDの節点, $A = A(D)$の元をDの辺と呼ぶ. 完全グラフK_nの各辺に向きを定めてえられる有向グラフをトーナメントグラフという. トーナメントグラフを拡張したグラフとして, in-トーナメントグラフが存在する. in-トーナメントグラフとは, 終点が共通である辺(x, v), (y, v)が存在した場合, その始点x, yに必ず辺(x, y)または(y, x)のいずれかが存在するような有向グラフDである.

本論文では, in-トーナメントグラフ上でハミルトン路が与えられたとき, ハミルトン閉路が存在するか否か調べ, 存在するならば構成する並列アルゴリズムを提案する。我々は, in-トーナメントグラフ上でのハミルトン路の存在判定, および, 構成を行なう並列アルゴリズムも得ているが, 別の機会に報告する.

2 後方辺, 前方辺, ハミルトン路上の区間

本並列アルゴリズムの方針としては, 求まったハミルトン路に対し辺の交換を行ないハミルトン閉路を構成していく. よって, ハミルトン路は既に求まっているものとする. 求まったハミルトン路に基づき, 各節点はハミルトン路の順に始点から順序付けされているとする. 本節では, 求まったハミルトン路を$H = x_1, x_2, \cdots, x_n$と表す. ハミルトン路上の各辺$(x_i, x_j)$において, x_i^+でx_jを, x_j^-でx_iを示すことにする. ハミルトン路Hの辺以外のDの辺(x_i, x_j)で, $j \leq i-2$を満たすものを後方辺と呼ぶ. また, ハミルトン路Hにおいて, H上の区間の節点集合$\{x_k : i \leq k \leq j\}$を$[x_i, x_j]$で表し, $\{x_k : i < k < j\}$を$]x_i, x_j[$で表す. 同様に$\{x_k : i \leq k < j\}$ならば$[x_i, x_j[$, $\{x_k : i < k \leq j\}$ならば$]x_i, x_j]$と表す.

良い後方辺集合$\{\ (y_m, y'_m),\ (y_{m-1}, y'_{m-1}),\ \cdots,\ (y_1, y'_1)\ \}$を定義する.

$y_m = x_n$,

$y'_m = \min_j\{\ x_j\ :\ (y_m, x_j) \in A(D)\ \}$,

for $i = m-1, m-2, \cdots, 1$,

$y_i = \max_d\{\ x_d \in [y'_{i+1}, y_{i+1}[\ : \exists x_j \in [x_1, y'_{i+1}[, (x_d, x_j) \in A(D)\ \}$,

$y'_i = \min_j\{\ x_j \in [x_1, y'_{i+1}[: (y_i, x_j) \in A(D)\ \}$.

良い後方辺集合とハミルトン閉路に関し, 次の補題がいえる.

[補題1] *in*-トーナメントグラフDにおいて, ハミルトン閉路が存在する必要十分条件は, 構成されたハミルトン路Hに対し, 良い後方辺集合が存在することである. □

(証明の概略) in-トーナメントグラフDにおいて, ハミルトン閉路が存在する必要十分条件はDが強連結であるということが知られている[1]. この事実を用いれば求まるが詳細は省く. □

後方辺に対し, 前方辺を定義する. 連続する後方辺の組(y_i, y'_i), (y_{i-1}, y'_{i-1})に対し, 前方辺を$(y_i'^-, y_{i-1}^+)$とする.

[補題2] *in*-トーナメントグラフにおいて, 良い後方辺集合 $\{\ (y_m, y'_m),\ (y_{m-1}, y'_{m-1}),\ \cdots,\ (y_1, y'_1)\ \}$が存在すれば, 前方辺集合$\{\ (y_m'^-, y_{m-1}^+),\ (y_{m-1}'^-, y_{m-2}^+),\ \cdots,\ (y_2'^-, y_1^+)\ \}$は必ず存在する. □

(証明略)

以下, 後方辺, 前方辺, および, ハミルトン路の区間を組み合わせることによりハミルトン閉路を構成する. 後方辺の集合に関し, 後方辺(y_i, y'_i), および, y_iより節点番号が1小さいy_jを始点とする後方辺(y_j, y'_j)の組が存在しない場合, 理想後方辺集合と呼ぶことにする.

[補題3] 良い後方辺集合は理想後方辺集合と仮定する. H上を先頭x_1から最後尾x_nへ順にたどった場合, 前方辺, または, 後方辺のいずれかの終点, 始点が交互に出現する. ただし, ある節点では, 終点と始点が共に存在する場合もある. □ (証明略)

補題3より, 前方辺, または, 後方辺のいずれかの終点, 始点が交互に出現することが分かった. H上において, x_1からx_nへ順にたどった時に出現する後方辺, または, 前方辺の終点, 始点をt_1, s_1, t_2, s_2, $\cdots$, t_l, s_lとする. 後方辺, 前方辺, および, $H[t_1, s_1]$, $H[t_2, s_2]$, $\cdots$, $H[t_l, s_l]$を組み合わせればハミルトン閉路が構成できる.

[補題4] 後方辺, 前方辺, および, $H[t_1, s_1]$, $H[t_2, s_2]$, $\cdots$, $H[t_l, s_l]$を組み合わせればハミルトン閉路が構成できる. □

(証明の概略) (y_m, y'_m)と$H[y'_m, y_m]$により, 誘導部分グラフ$D[y'_m, y_m(= x_n)]$のハミルトン閉路が構成できる.

ある後方辺 (y_{i+1}, y'_{i+1}) まで加え, $D[y'_{i+1}, y_m(= x_n)]$ のハミルトン閉路が構成されていると仮定する. これに, 後方辺 (y_i, y'_i) を加える. y_i は $D[y'_{i+1}, y_m(= x_n)]$ におけるある区間 $H[t_j, s_j]$ 上に存在する. $D[y'_{i+1}, y_m(= x_n)]$ に (y_i, y'_i) を加え, $D[y'_i, y_m(= x_n)]$ のハミルトン閉路を構成するには, 辺 (y_i, y_i^+) を除去し, その区間を (y_i, y'_i), $H[y'_i, y'_{i+1}]$, (y'^-_{i+1}, y_i^+) で置き換えればよい. 新しく $H[y'_i, y'^-_{i+1}]$ が追加され, $H[t_j, s_j]$ が, $H[t_j, y_i]$, $H[y_i^+, s_j]$ に変わるが, 共に終点 t_*, 始点 s_* 間の区間 $H[t_*, s_*]$ を用い, 後方辺 (y_i, y'_i), 前方辺 (y'_{i+1}, y_i^+) で $D[y'_i, y_m(= x_n)]$ のハミルトン閉路を構成できる. よって, 最終的に $D[y'_1(= x_1), y_m(= x_n)]$ のハミルトン閉路を構成できる. □

次に, 理想後方辺集合でない場合について述べる. このような場合, 後方辺 (y_i, y'_i) と (y_j, y'_j) の組に対する前方辺 (y'^-_{j-1}, y'_i), (y_j, y^+_{i+1}) が存在することになり, 節点 y_j で出力辺, y'_i で入力辺が 2 本存在することになる. よって, このような場合, 前方辺 (y'^-_{j-1}, y'_i), (y_j, y^+_{i+1}) を (y'^-_{j-1}, y^+_{i+1}) に置き換えればよい.

[補題 5] 節点番号が連続であるような y_j, y'_i, つまり, H 上の辺 (y_j, y'_i) に関し, 2つの後方辺 (y_i, y'_i), (y_j, y'_j), が存在する場合, 前方辺 (y'^-_{j-1}, y'_i), (y_j, y^+_{i+1}) を (y'^-_{j-1}, y^+_{i+1}) に置き換えることによりハミルトン閉路を構成できる. □ (証明略)

3 並列アルゴリズム

前節で述べたように, ハミルトン路が与えられれば, まず, 後方辺の存在をしらべることにより, ハミルトン閉路の存在が分かる. また, ハミルトン閉路が存在するならば後方辺, 前方辺, ハミルトン路上の区間を組合せ, かつ, 補題 5で述べたような後方辺の組が存在する場合には前方辺を修正することによりハミルトン閉路が構成できる. 与えられたハミルトン路に基づき, 各節点はハミルトン路の順に始点から順序付けされているとし, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n で表す. 良い後方辺集合を並列に求める方法は次のようになる.

Procedure **Find_backward_edge_set**

begin

(Step 1) 各節点 $x_i, 2 \le i \le n$, において, 最小節点番号をもつ後方辺を並列に求める.

(Step 2) Step 1 で求めた後方辺に対し, 各節点 x_j において終点を x_j とする 2 つ以上の後方辺が存在する場合, i が最大である (x_i, x_j) を選ぶ. それ以外の $(*, x_i)$ は除去する.

(Step 3) 配列 $\mathcal{N}[k]$, $1 \le k \le n$, を準備する. 初期値として, $\mathcal{N}[k] = \infty$, $1 \le k \le n$, を代入する. Step 1,2 で選択された各後方辺 (x_i, x_j) に対し, $\mathcal{N}[i] := j$ とする.

(Step 4) 配列 $\mathcal{N}[i]$ の各 i, $1 \le i \le n$, に対し, suffix minima を並列に求め, その結果を $\mathcal{N}_s[i]$ に代入する. suffix minima $\mathcal{A}_s[i]$, $1 \le i \le n$, とは, 配列 $\mathcal{A}[] = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ の要素が与えられたとき, 各 $\mathcal{A}_s[i]$, $1 \le i \le n$, には $\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\}$ の要素の中で最小の値が代入されることである.

(Step 5) もし, $\mathcal{N}_s[i] = i$, $2 \le i \le n$, が存在したならば, 良い後方辺集合が存在しない. 終了.

(Step 6) 求まった $\mathcal{N}_s[\ ]$ の各要素 k に対し, k を終点とし, $\mathcal{N}[l] = k$ である l を始点とする後方辺 (l, k) を良い後方辺集合の要素とする.

end.

ハミルトン閉路を求める並列アルゴリズムをまとめると次のようになる.

Procedure **Find_Hamiltonian_cycle**

begin

(Step 1) 良い後方辺集合を求める.
Procedure **Find_backward_edge_set**

(Step 2) 前方辺集合を並列に求める.

(Step 3) ハミルトン路上で (x_i, x_j), (x_{j-1}, x_k), $i < j < k$ であるような前方辺が存在するか調べ, 存在すれば (x_i, x_k) で置き換える.

(Step 4) 良い後方辺集合, 前方辺集合に属する後方辺, および, 前方辺の各終点, 始点を並列ソーティングし配列 $\mathcal{H}[i], i = 1, \cdots, n'$, に格納する. ハミルトン路上の区間 $H[\,\mathcal{H}[j], \mathcal{H}[2j]\,], j = 1, \cdots, n'$, がハミルトン閉路を構成するのに必要な区間となる. ただし, n' は良い後方辺集合, 前方辺集合に属する後方辺, および, 前方辺の数である.

end.

[定理 1] *in*-トーナメントグラフ D 上でのハミルトン路 H が与えられれば, Procedure **Find_Hamiltonian_cycle** により, *CREW PRAM* 上で全体として, $O(n+m)$ 個のプロセッサを用いて $O(\log n)$ 時間でハミルトン閉路の存在判定を行ない, 存在するならばハミルトン閉路を構成することができる. □ (証明略)

参考文献

[1] J. Bang-Jensen, J. Huang, E. Prisner: "In-Tournament Digraphs" *J. Combinatorial Theory, Series B*, **59**, pp.267-287, 1993.

[2] Joseph JáJá: *An Introduction to parallel algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.