1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

$K_{1,3}$自由グラフの最大重み安定集合を求めるMintyの算法の修正

入会申請中　電気通信大学 中村大真 NAKAMURA Daishin *
01306430　電気通信大学 田村明久 TAMURA Akihisa

1　はじめに

無向グラフ $G=(V,E)$ と頂点重み $w:V\to\Re$ を固定する．頂点の集合 $S\subseteq V$は，Sに属するどの2頂点も互いに隣接しないとき**安定集合**といい，Sに属する頂点の重みの和を $w(S)$ と書く．G のどの4点も $K_{1,3}$を誘導しないとき，G を **$K_{1,3}$自由グラフ**という．$K_{1,3}$自由グラフ G と重みwが与えられたとき，$w(S)$ 最大の安定集合Sを求める多項式時間算法として，Minty[1] の算法がある．本発表ではMintyの算法が正しく動かない場合があることを示し，さらに必ず正しく動くような算法の修正を提案する．

2　Mintyの算法

まずMintyの算法 [1] の要点を述べる．

安定集合 Sは $|T|=|S|$ かつ $w(T)>w(S)$ となる安定集合 Tが存在しないとき**部分最適**という．以下，部分最適安定集合 Sを固定する．Sに属する頂点を**黒点**，それ以外の頂点を**白点**と呼ぶ．白点 vに隣接する黒点の個数は2以下であり，2のときvを**束縛点**，1か0のとき**自由点**と呼ぶ．隣接する二つの黒点が同じ束縛点全体を**翼**と呼ぶ．

G 上の単純な道や閉路は，白点と黒点が交互で，かつ道や閉路上で隣接しない2点がG 上でも隣接しないとき，**交互道**や**交互閉路**という．その白点の重みの総和からその黒点の重みの総和を引いた値をその**増分**と呼ぶ．増分が正の交互閉路を**増加閉路**と呼ぶ．増分が正で両端点とも束縛点でない交互道を**増加道**と呼ぶ．マッチングに対する増加道を**辺増加道**と呼んで区別する．

G の最大重み安定集合を求める問題は，与えられた部分最適安定集合 Sに対して任意の自由点a-b 間の増分最大の増加道を求める問題に帰着する．$a=b$ならば $\{a\}$ が唯一の交互道である．以下 $a\neq b$ として，a およびb に隣接する黒点を x_aおよび x_bと書く．$x_a=x_b$ならば $\{a,x_a,b\}$ が唯一の交互道である．以下 $x_a\neq x_b$とする．a, b 以外の自由点，a またはb に隣接する白点，および高々1 個の翼と隣接する黒点を除くことを可能な限り繰り返す．x_a, x_bおよび3個以上の翼と隣接する黒点を**分岐点**，その他の黒点を**非分岐点**と呼ぶ．

分岐点vに隣接する白点全体 $N(v)$ を，$N^1(v)$ と $N^2(v)$ に次で分割する．$N^1(x_a)=\{a\}$, $N^2(x_a)=N(x_a)-\{a\}$. $N^1(x_b)=\{b\}$, $N^2(x_b)=N(x_b)-\{b\}$. x_a, x_b以外の分岐点vについては，異なる翼に属する任意の$x,y\in N(v)$ について，x と yの一方が $N^1(v)$，他方が $N^2(v)$ に属することと，x と yが隣接しないことが同値となるようにできる．

Edmonds グラフと呼ばれるグラフを次で構成する．頂点は a, b, および各分岐点 vに対して v^1, v^2の2個ずつ．黒辺 (v^1,v^2) を引き，重みを $w(v)$ とする．白辺 (a,x_a^1), (b,x_b^1) を引き，重みを $w(a)$, $w(b)$ とする．各分岐点の組 u,v と $p,q\in\{1,2\}$ に対して，両端点が $N^p(u)$ と $N^q(v)$ 内で間の黒点がすべて非分岐点である交互道のうち増分最大のものを求め，その増分を白辺 (u^p,v^q) の重みとする．黒辺全体を Mと書き，これは完全マッチングより一本少ないマッチングである．Edmondsグラフは以下の二つを満たさなければならない:

1. Mに対する増分最大の辺増加道は，Sに対する a-b 間の増分最大の増加道に対応する
2. Mは辺数が完全マッチングより一本少ないマッチングの中では最大重みである

条件2はMに対する増分最大の辺増加道を求めるために必要である．条件2が満たされれば，最大重みマッチング M^*を求めれば，M^*の重みがMより大きければMと M^*との対称差に増分最大の辺増加道が含まれ，等しければ辺増加道は存在しない．条件1より前者なら対応してG 上で Sに対する a-b 間の増加道が求められ，後者なら a-b 間の増加道は存在しない．

3　正しく動かない例

上の構成によれば条件 1 は必ず満たされるが，条件 2 はそうとは限らず，Sの部分最適性によっても長さ 4 の辺増加閉路の存在は否定できない．図 1の重み付き $K_{1,3}$自由グラフの黒点で示した部分最適安定集合がその例である．自由点 a-b 間の増分最大の増加道を求めるための Edmonds グラフを図 2に示す．増分+2 の辺増加閉路 (x_3^1, x_3^2, x_4^2, x_4^1, x_3^1) が存在する．最大マッチングと黒辺との対称差をとると，増分+5 の辺増加道 (a, x_a^1, x_a^2, x_1^1, x_1^2, x_2^2, x_2^1, x_b^2, x_b^1, b) と増分+2 の辺増加閉路 (x_3^1,x_3^2,x_4^2,x_4^1,x_3^1) となり，増分最大 (+6) の辺増加道 (a, x_a^1, x_a^2, x_3^2, x_3^1, x_4^1, x_4^2, x_b^2, x_b^1, b) は求められない．

4　Edmonds グラフの修正

そこで条件 1 を崩さずに長さ 4 の辺増加閉路を除いて，条件 2 を満たすようにする．その概要を説明する．

Edmonds グラフ上の長さ 4 の辺増加閉路は，G 上では分岐点 2 個 x_i, x_j と非分岐点をすべて共有する 2 本の交互道に対応することが示せる．

$N^1(x_i)$, $N^2(x_i)$, $N^1(x_j)$, $N^2(x_j)$ の分布を調べれば，図 3のようにある交互道を a-b 間の増加道が通らないと簡単に判定できる場合がある．この場合は図 4のように対応する Edmonds グラフの白辺を除けば，条件 1 を崩さず辺増加閉路を除ける．

そうでない場合，G の $K_{1,3}$自由性と Sの部分最適性とを用いて必ず図 5のように道の組み替えのできる非分岐点 zが存在することが示せる．そこで Edmonds グラフに新たに zに対応する黒辺を加えて図 6のように修正すれば，条件 1 を崩さず辺増加閉路を除ける．

以上の修正を加えた算法は重み最大の安定集合を多項式時間で必ず正しく求める．

参考文献

[1] G. J. Minty, “On Maximal Independent Sets of Vertices in Claw-Free Graphs,” *Journal of Combinatorial Theory B*, **28**, 284-304 (1980).

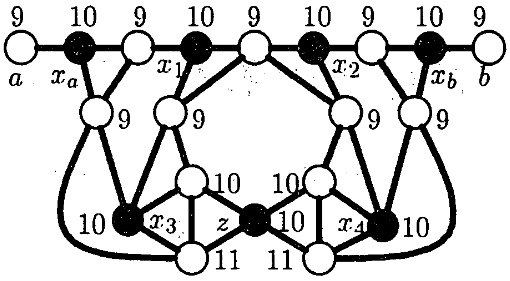


図 1: 正しく動かない例

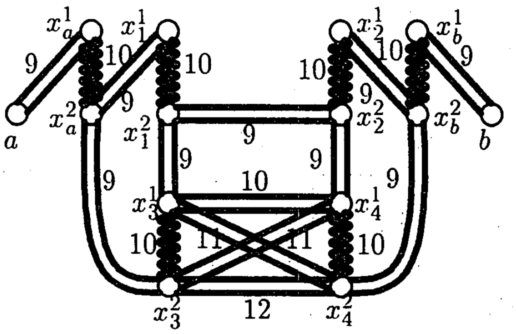
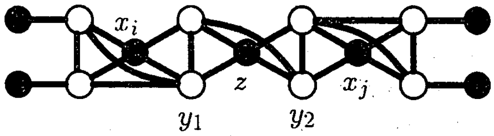


図 2: 上の例に対する Edmonds グラフ



a-b 間の増加道は交互道 (y_1, z, y_2) を通らない

図 3: 交互道を除ける例 (G の一部分の図)

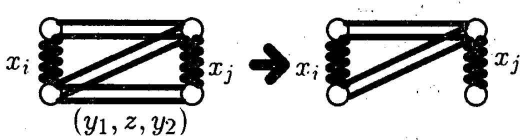
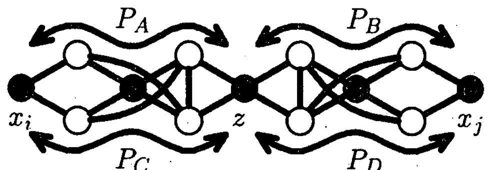


図 4: 長さ 4 の辺増加閉路の除去前と除去後



元の交互道：(P_A, z, P_B) と (P_C, z, P_D)
新しい交互道：(P_A, z, P_D) と (P_C, z, P_B)

図 5: 交互道の組み替えの例 (G の一部分の図)

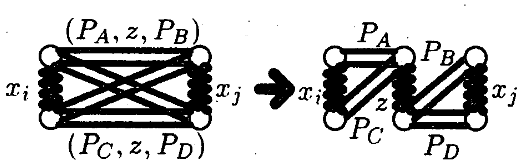


図 6: 長さ 4 の辺増加閉路の除去前と除去後