節点・領域間の枝連結性と距離を保存する疎な全域部分グラフ

01605520　NTTﾏﾙﾁﾒﾃﾞｨｱﾈｯﾄﾜｰｸ研究所　*巳波弘佳　MIWA Hiroyoshi
01009550　豊橋技術科学大学　伊藤大雄　ITO Hiro

1．まえがき

グラフにおける節点と節点部分集合（領域）との間の連結度を表す概念として節点領域連結（以下NA連結）というものが提案されている[1]-[4]．NA連結性については既に様々な性質が明らかにされている．例えば[3]では，NA連結度を保つ枝数が最小の全域部分グラフを求める問題はNP困難であるが，近似解として，疎な全域部分グラフを多項式時間で構成できることが示されている．

本稿では，NA連結度を保つだけでなく，節点と領域間の距離も保つ疎な全域部分グラフを構成する多項式時間アルゴリズムを提案する．

2．諸定義

無向グラフ$G=(V,E,d)$（ただし節点集合V，枝集合E，枝の長さ$d=\{d(e)\mid e\in E\}$）．Gの節点集合，枝集合を，それぞれ$V(G)$，$E(G)$とも表す．$V(G)$の部分集合$S,T\subseteq V(G)$に対して，カット$E(S,T;G)$を$E(S,T;G)=\{(i,j)\in E(G)\mid i\in S, j\in T\}$で定義する．$V$の部分集合族$X=\{W_i\mid W_i\subseteq V,\ i=1,2,\ldots,p\ (\leqq|V|)\}$に対して，$(G,X)$を**領域グラフ**と呼び，各$W_i$を**領域**と呼ぶ．グラフ$G'$が，$V(G')\subseteq V(G)$かつ$E(G')\subseteq E(G)$を満たすとき，$G'$をグラフ$G$の**部分グラフ**と呼び，特に$V(G')=V$の時は，$G'$をグラフ$G$の**全域部分グラフ**と呼ぶ．$G$の全域部分グラフ$H=(V,F)$で，$H$は閉路を持たないが，$^\forall e\in E-F$に対しても$(V,F\cup\{e\})$が閉路を持つとき，$H$を$G$の**極大全域森**と呼ぶ．特に連結な極大全域森を**全域木**と呼ぶ．グラフ$G=(V,E)$，$^\forall v\in V$，$W\subseteq V-\{v\}$に対して，$^\forall F\subseteq E\ (|F|\leqq k-1)$を$E$より除去したグラフ$G-F=(V,E-F)$において，$v$と$^\exists w\in W$が連結であるとき，節点$v$と領域$W$は**k-NA枝連結**であるという．$G$において節点$v$と領域$W$がk-NA枝連結である最大の$k$を，節点$v$と領域$W$間のNA枝連結度といい，$\lambda(v,W;G)$で表す．領域グラフ$(G,X)$において，$^\forall i\ (=1,2,\ldots,p)$に対して，$^\forall v\in V-W_i$と$W_i$がk-NA枝連結であるとき，領域グラフはk-NA枝連結であるという．領域Wが一点からなる時，NA枝連結は通常の枝連結と一致する．Gの部分グラフPが，$V(P)=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{l-1},v_l\}$かつ$E(P)=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{l-1},v_l)\}$を満たすとき，$P$を$v_1$と$v_l$間の経路長$\Sigma_{i=1}^{l-1}d((v_i,v_{i+1}))$の$v_1$-$v_l$パスと呼ぶ．パスの集合に対して，その任意の2本のパスが共有枝を持たない時，これらのパスは**枝独立**という．Gにおける節点v,w間の距離$dist(v,w,G)$を，v,w間のパスの中で最も短いパスの経路長と定義し，そのパスをv,w間の**最短パス**と呼ぶ．Gにおける領域W_1,W_2間の**領域間距離**を，

$dist(W_1,W_2,G)=min\{dist(v,w,G)\mid {}^\forall w_1\in W_1, {}^\forall w_2\in W_2\}$

と定義する．特に一方の領域が1つの節点からなる時，**節点領域間距離**と呼ぶ．$s\in V$を根とするGの全域木Tで，$dist(s,w,T)=dist(s,w,G)$を満たすものを，sを根とする**最短パス木**と呼ぶ．

3．NA枝連結性に関する従来の結果

k-NA枝連結領域グラフが与えられた時，枝数最小のk-NA枝連結全域部分グラフを求める問題はNP困難であることが分かっている[3]．しかし，枝数が$k|V|$以下の全域部分グラフならば，多項式時間で求めることができる．

【補題1】[3]

無向グラフG，任意の自然数kに対して，Gの全域部分グラフ$G'=(V,E')$が

$\lambda(v,w;G')\geqq min\{\lambda(v,w;G),k\}$ for $^\forall v,w\in V$

を満たすならば，

$\lambda(v,W;G')\geqq min\{\lambda(v,W;G),k\}$

for $^\forall v\in V$, $^\forall W\subset V-\{v\}$

が成り立つ．□

無向グラフ$G=(V,E)$が与えられた時，枝連結度を保存する全域部分グラフを次のように構成する．極大全域森$H_1=(V,F_1)$を構成し，次に部分グラフ$(V,E-F_1)$の任意の極大全域森$H_2=(V,F_2)$を構成する．同様にして，部分グラフ$(V,E-\cup_{i=1}^{j-1}F_i)$の任意の極大全域森$H_j=(V,F_j)$を，$H_r$（$F_j\neq\phi$ for $1\leqq j\leqq{}^\exists r$, $F_j=\phi$ for $j>r$）まで構成する．続いて，$E_j=\cup_{i=1}^{j}F_i$，$G_j=(V,E_j)$ $(j=1,\ldots,r)$を構成する．

【補題2】[5]

無向グラフGが与えられた時，上のようにして構成されたグラフG_kは次の性質を満たす．

・$\lambda(v,w;G_k)=min\{\lambda(v,w;G),k\}$ for $^\forall v,w\in V$

・$|E(G_k)|\leqq k|V|$ □

【定理1】[3]

自然数k，k-NA枝連結領域グラフ(G,X)，$X=\{W_i\mid W_i\subseteq V,\ i=1,2,\ldots,p\ (\leqq|V|)\}$に対して，$G$の全域部分グラフ$G'=(V,E')$で

・$^\forall v\in V$, $^\forall W_i\in X$に対して

$\lambda(v,W_i;G')=\lambda(v,W_i;G)$

・$|E'|\leqq k|V|$

を満たすものを構成できる．□

補題1は，枝連結性を保存する部分グラフG'は，NA枝連結性も保存することを示しており，更に補題2から，このようなG'を実際に構成できるので，定理1の結果が得られる．

3．節点領域枝連結性と節点領域間距離を保存するアルゴリズム

本節では，NA枝連結性を保存するだけでなく，節点領域間距離も保存する．枝数が$O(max(k,p)|V|)$の全域部分グラフを構成する多項式時間アルゴリズムを与える．

（アルゴリズム$Resv_Connect_Dist(G,X)$）

領域グラフ(G,X), $X=\{W_i \mid W_i \subseteq V, i=1,2,\ldots,p\ (\leq |V|)\}$に対して

Step1: 各領域$W_i\ (i=1,2,\ldots,p)$に対し，ダミー節点w_iを用意し，w_iとW_iの各節点の間に長さ0の枝を張る．

Step2: 各w_iを根とする最短パス木T_iを構成し，Gとの共有部分グラフ$S_i=(V, E(T_i)\cap E(G))$を構成する．

Step3: Gの極大全域森$H_1=S_1=(V,F_1)$.

Step4: 部分グラフ$(V, E(S_2)-(E(S_2)\cap F_1))$を含む任意の極大全域森$H_2=(V,F_2)$を構成する．

Step5: 同様にして，部分グラフ$(V, E(S_j)-(E(S_j)\cap \cup_{i=1}^{j-1} F_i))$を含む任意の極大生成森$H_j=(V,F_j)$を$H_{max(k,p)}$まで構成する．

Step6: $E_j=\cup_{i=1}^{j} F_i$, $G_j=(V,E_j)\ (j=1,\ldots,max(k,p))$を構成する．

【定理2】

i) 領域グラフ(G,X), $X=\{W_i \mid W_i \subseteq V, i=1,2,\ldots,p\ (\leq |V|)\}$が与えられた時，アルゴリズム$Resv_Connect_Dist(G,X)$において構成されるグラフ$G_{max(k,p)}$は次の性質を持つ．

- $\lambda(v, W_i; G_{max(k,p)})=min\{\lambda(v, W_i; G), k\}$ for $\forall v \in V, \forall W_i \in X$
- $dist(v, W_i, G_{max(k,p)})=dist(v, W_i; G)$ for $\forall v \in V, \forall W_i \in X$
- $|E(G_{max(k,p)})| \leq max(k,p)|V|$

ii) 領域グラフ(G,X), $X=\{W_i \mid W_i \subseteq V,\ i=1,2,\ldots,p\ (\leq |V|)\}$に対して，アルゴリズム$Resv_Connect_Dist(G,X)$は，$G$の全域部分グラフ$G_{max(k,p)}$を$O(p(|E|+|V|log|V|)+k(|V|+|E|))$時間で構成する．

（証明）

i) 補題2の証明[5]と同様にして，

$\lambda(v, w; G_k)=min\{\lambda(v, w; G), k\}$ for $\forall v, w \in V$

が成り立つ．更に，補題1から枝連結性を保存する任意の部分グラフは，NA枝連結性も保存するので，

$\lambda(v, W_i; G_{max(k,p)})=min\{\lambda(v, W_i; G), k\}$
for $\forall v \in V, \forall W_i \in X$

が成り立つ．

次に，$G_{max(k,p)}$においては，$H_j\ (\forall j \leq max(k,p))$の枝はすべて含まれている．つまり，各節点$w_i\ (i=1,2,\ldots,p)$を根とする最短パス木が含まれており，$w_i$と領域$W_i$の間の枝の長さは0なので，節点$v \in V$と領域$W_i \in X$との間の節点領域間距離を経路長に持つパスの枝はすべて含まれている．従って，

$dist(v, W_i, G_{max(k,p)})=dist(v, W_i, G)$ for $\forall v \in V, \forall W_i \in X$
が成り立つ．

また，$G_{max(k,p)}$は極大全域森$max(k,p)$個から構成されるので，$|E(G_{max(k,p)})| \leq max(k,p)|V|$が成り立つ．

ii) アルゴリズム$Resv_Connect_Dist(G,X)$において，$G_{max(k,p)}$を構成するためには，最短パス木をp個，極大全域森を$max(k,p)$個構成しなければならないので，$O(p(|E|+|V|log|V|)+k(|V|+|E|))$時間が必要である．従って，題意が証明できた．□

アルゴリズム$Resv_Connect_Dist(G,X)$で構成されるグラフ$G_{max(k,p)}$は，領域集合Xの任意の2つの領域に対して，領域間距離も保存する．更に，節点領域連結度と同様にして定義される，領域間枝連結度（AA枝連結度）[3]も保存する．

3．まとめ

本稿では，節点領域枝連結度を保存し，更に節点領域間の距離も保存する，枝数$max(k,p)|V|$以下の全域部分グラフを求める多項式時間アルゴリズムを提案した．

参考文献

[1]伊藤，"全節点・領域間のk-枝連結性の高速判定法"，信学技報，COMP94-84, pp.75-83, 1995.

[2]伊藤，"グラフにおける節点・領域連結度について"，電気学会論文誌C, Vol.114-C, No.4, pp.463-469, 1994.

[3]伊藤，"通信網の簡素化問題-連結度，領域グラフ，T-混合カット"，NTT R&D, Vol.44, No.4, pp.367-372, 1995.

[4]伊藤，永持，"T-混合カットにおける領域間連結度の性質"，OR学会春季研究発表会アブストラクト集，pp.219-220, 5. 1994.

[5]Nagamochi and Ibaraki, "A linear time algorithm for finding a sparse k-connected spanning subgraph of a k-connected graph", Algorithmica, 7, pp.583-596, 1992.