1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

無向ネットワーク内の全ての最小カットを表すカクタス表現の構成について

京都大学 *中尾 芳隆 NAKAO Yoshitaka
01403794 京都大学 永持 仁 NAGAMOCHI Hiroshi
01001374 京都大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 はじめに

無向ネットワーク $N=(V,E,c)$ における全ての最小カットを簡明に表現するデータ構造としてカクタス表現がある．ただし，VはNの頂点集合，Eは辺集合，cは辺の重みを表し，$n=|V|$, $m=|E|$とする．カクタス表現を用いると，Nの全ての最小カットを，カクタスの最小カットとして簡単な計算で効率よく求めることができる．カクタス表現は，辺連結度増加問題や辺分離問題などを効率よく解くために広く応用されている．

これまでに提案されているカクタス表現構成アルゴリズムでは，Gabow [1] による $O(nm\log(n^2/m))$ 時間アルゴリズムや，永持と亀田 [2] による $O(nm+n^2\log n+|W|m\log n)$ 時間アルゴリズムがある．ここで，$|W|$ は出力されたカクタス表現の節点数である．

本研究では，文献 [2] のアルゴリズムを改良した新しいアルゴリズムを構築した．その計算時間は $O(nm+n^2\log n+|C|m\log n)$ である．ただし $|C|$ は出力されたカクタス表現における閉路の数を表す．カクタスでは $|C|\le|W|$ が常に成立するので，本研究のアルゴリズムの計算時間は [2] より短縮されている．

2 定義

Vを 2 つの部分集合 Xと$\overline{X}(=V-X)$ に分割したとき，それをNのカットといい $\{X,\overline{X}\}$ で表す．またその 2 つの集合にまたがる辺の容量の和をカットの大きさといい，$c(X,\overline{X})$ で表す．$\lambda(N)\equiv\min\{c(X,\overline{X})\mid\{X,\overline{X}\}$ はNのカット $\}$, $\lambda(u,v)\equiv\min\{c(X,\overline{X})\mid\{X,\overline{X}\}$ は u と vを分離するカット $\}$ と定義する．$c(X,\overline{X})=\lambda(N)$ を満たすカット $\{X,\overline{X}\}$ をNの最小カットといい，Nの全ての最小カットの集合を $\mathcal{C}(N)$ で表す．

全ての辺がどれかの閉路に属していて，閉路の任意のペアが高々 1 つの頂点しか共有しないとき，そのネットワークををカクタスという．1 つの頂点からなるネットワークを自明なカクタスという．なお，カクタスにおいては全ての辺の容量は 1 とする．ネットワーク $N=(V,E,c)$ に対し，カクタス $\mathcal{R}$ と写像 $\varphi:\{V,\emptyset\}\to W$を導入する．$W$はカクタスの節点集合である．$W$は$\varphi(\emptyset)=x$ となるような節点xをもつことがある．また，$\mathcal{C}(\mathcal{R})$ は$\mathcal{R}$内の全ての最小カットの集合を表す．

定義 1 Nの最小カットからなるある集合 $\mathcal{C}'\subseteq\mathcal{C}(N)$ に対し，$(\mathcal{R},\varphi)$ が次の (i),(ii) を満たすとき，$(\mathcal{R},\varphi)$ は$\mathcal{C}'$に対するカクタス表現であるという．

(i) $\mathcal{R}$ の任意の最小カット $\{S,W-S\}\in\mathcal{C}(\mathcal{R})$ に対し，$X=\{u\in V\mid\varphi(u)\in S\}$, $\overline{X}=\{v\in V\mid\varphi(v)\in W-S\}$ とすると，$\{X,\overline{X}\}\in\mathcal{C}'$が成り立つ．

(ii) 逆に，Nにおける任意の最小カット $\{X,\overline{X}\}\in\mathcal{C}'$に対し，$X=\{u\in V\mid\varphi(u)\in S\}$, $\overline{X}=\{v\in V\mid\varphi(v)\in W-S\}$ であるような最小カット $\{S,W-S\}\in\mathcal{C}(\mathcal{R})$ が存在する． □

例えば図 1 のネットワーク Nの $\mathcal{C}(N)$ に対するカクタス表現 $(\mathcal{R},\varphi)$ を図 2 に示す．

3 アルゴリズム

$\lambda(s,t)=\lambda(N)$ が成り立つ辺 (s,t) は臨界辺と呼ばれる．まずNのある臨界辺 (s,t) を見つけ，その 2 点間の最大フローを求める．その結果 s と t を分離する全ての最小カットを見つけることができ (その数を $r-1(\le 0)$ とする)，それらの最小カットにしたがって，Vを互いに素なr個の部分集合 $(V_1,\ldots,V_r)$ に分割できる．2 つの正整数 h と k $(1\le h\le k\le r)$ に対し，$V_{(h,k)}\equiv V_h\cup V_{h+1}\cup\ldots\cup V_k$ と定義する．s,t を分離する全ての最小カットを見つけた後，

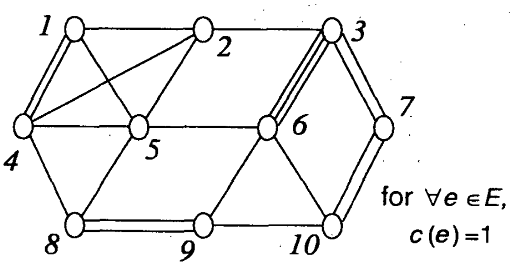

図 1: ネットワーク Nの例 ($\lambda(N)=4$)

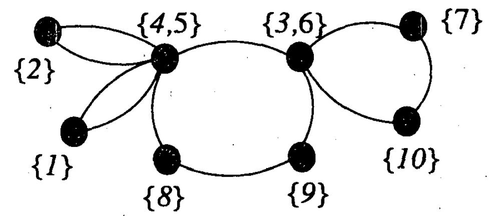

図 2: $\mathcal{C}(N)$ に対するカクタス表現 $(\mathcal{R},\varphi)$

$c(V_{(i,j)},\overline{V_{(i,j)}})=\lambda(N)$ $(1<i\le j<r)$ を満たすような最小カット $\{V_{(i,j)},\overline{V_{(i,j)}}\}$ も全て求める. そうすると, 以上で見つかった全ての最小カットを表した (s,t)-カクタス表現を構成できる [2]. なお, 2 点 s,t 間に最大フローを流した後, (s,t)-カクタス表現を求めるのにかかる時間は $O(m+n)$ である [2]. 例えば, 図 1 のネットワーク Nで $s=8, t=9$ と選んだときの $(8,9)$-カクタス表現は図 3 のようになる.

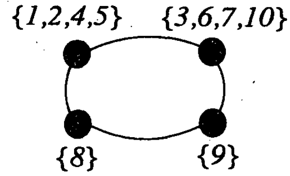

図 3: 図 1 の Nにおける $(8,9)$-カクタス表現

この時点で求まっていない最小カット $\{X,V-X\}$ は, ある部分集合 V_iに対し $X\subset V_i$を満たすようなものである. [2] ではここから s と t を縮約したが, 本研究のアルゴリズムでは入力されたネットワーク Nを r個のネットワーク $N_1,\ldots,N_r$に分解して, 残りの最小カットを求める. ただし N_iは $V-V_i$を 1 点に縮約して得られるネットワークである. 以上をふまえ, 本研究の全体のアルゴリズムは次のように再帰的手続きとして書ける.

Procedure CACTUS(N)
1. Nのある臨界辺 (s,t) に対し, (s,t)-カクタス表現 $(R_{(s,t)},\varphi_{(s,t)})$ を求める.
2. Nを $(N_1,\ldots,N_r)$ に分解し, 各 N_iにおいて, $\mathcal{C}(N_i)$ に対するカクタス表現 $(\mathcal{R}_{N_i},\varphi_{N_i})$ を, 手続き CACTUS(N_i) により再帰的に求める.
3. $(\mathcal{R}_{N_i},\varphi_{N_i})$ を $(\mathcal{R}_{(s,t)},\varphi_{(s,t)})$ に結合させることで $\mathcal{C}(N)$ に対するカクタス表現 $(\mathcal{R},\varphi)$ を求める.

最後に計算時間について述べるが, 最初に$\lambda(N)$を求めておくのに $O(nm+n^2\log n)$ 時間かかる. 2 点 s,t 間の最大フローは, 本研究のアルゴリズムのようにあらかじめ s,t と指定しておく必要がない場合は, [3] により $O(m\log n)$ 時間で求まる. 手続き CACTUS(N) では最大フローを何回も求める必要があるが, 最大フローを求めるのにかかる全体の時間は $O(|\mathcal{C}|m\log n)$ 時間であることが示せる (証明略). 他の部分の計算時間はその時間以下であることを示せるので, 全体の計算時間は $O(nm+n^2\log n+|\mathcal{C}|m\log n)$ である.

4 計算機実験の結果

本研究のアルゴリズムを C 言語で記述し, ワークステーション SUN Ultra2 上で実行させることにより, 実際どの程度の時間がかかるのかを調べた. 例えば, $|\mathcal{C}|$ が n にほぼ比例するようなランダムグラフでは, $n=1000, m=2000$ のときの CPU 時間は約 5 分, $|\mathcal{C}|$ がきわめて少ない (およそ 5 以下の) ランダムグラフでは, $n=1000, m=20000$ のときの CPU 時間は約 1 分となった.

参考文献

[1] H.N. Gabow, *A representation for crossing set families with applications to submodular flow problems*, Proc. 4th ACM Symposium on Discerte Algorithms, 1993, 202-211.

[2] H. Nagamochi and T. Kameda, *Constructing cactus representation for all minimum cuts in an undirected network*, Operation Research Society of Japan, 39, 1996, 135-158.

[3] H. Nagamochi, T. Ishii and T. Ibaraki, *A simple and constructive proof of a minimum cut algorithm*, unpublished manuscript.