1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

直並列グラフを利用した all-terminal reliability の下界

02102204　大阪大学工学部　*小出　武　KOIDE　Takeshi
01205144　鹿児島大学理学部　新森 修一　SHINMORI　Shuichi
01005195　大阪大学工学部　石井 博昭　ISHII　Hiroaki

1. はじめに

ネットワークシステムの信頼度を測る尺度の一つである **all-terminal reliability（総合信頼度）** とは、確率グラフ中の全ての点が正常に機能している枝によって連結されている確率である。一般に、all-terminal reliability の値を求めるのに要する計算時間は枝の本数に対し指数的に増加する（#P-完全）ので、精度の良い境界値、特に下界を多項式時間で求めることが重要になる（[1]）。

我々は極大木による edge-packing を用いて all-terminal reliability の下界を多項式時間で導出する方法を提案した（[2]）。本稿では直並列グラフによる edge-packing を用いて下界を導出する方法を提案する。

2. 準備

要素数 n の点集合 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$、要素数 m の枝集合 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$ からなる無向グラフを $G=(V,E)$ とする。グラフ中の各枝は正常に機能している状態（正常状態）と故障している状態（故障状態）の２つの状態があり、枝 $e\in E$ が正常である確率（枝正常確率）を p_e とし、各枝の枝正常確率は互いに独立とする。このような確率グラフ G 中の全ての点が正常な枝によって連結になるとき、G で表現されるネットワークは正常であるという。ネットワークが正常である確率を all-terminal reliability と呼び、$Rel(G)$ で表す（[1]）。

3. edge-packing による $Rel(G)$ の下界

定義１： グラフ $G=(V,E)$ に対し、互いに枝排反な部分グラフの集合

$$\left\{G_i \mid G_i=(V,E_i),\ E_i\subset E,\ E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)\right\}$$

を **edge-packing** という。

定理１： グラフ $G=(V,E)$ が要素数 k の edge-packing をもつとき、次の不等式が成立する [1]。

$$Rel(G)\geq 1-\prod_{i=1}^{k}\left\{1-Rel(G_i)\right\} \qquad (1)$$

定理１から、$Rel(G_i)$ が多項式時間で計算できるような edge-packing を多項式時間で構築できれば、$Rel(G)$ の下界を多項式時間で求めることができることがわかる。また下界の精度を上げるには、各 $Rel(G_i)$ を大きくする、または edge-packing を構成する部分グラフの数 k を大きくすればよいことがわかる。

4. 直並列グラフの利用

我々は極大木による edge-packing を用いて all-terminal reliability の下界を導出する方法を提案した（[2]）が、本稿では直並列グラフによる edge-packing を提案する。

定義２： 点数４の完全グラフと同相なグラフを部分グラフに持たないグラフを**直並列グラフ**（**series-parallel graph**）という。

直並列グラフ G に対し、[2]で提案した次数１削除変換、次数２削除変換、および平行枝変換（以下、総称として３変換と呼ぶ）を繰り返し適用すれば、$Rel(G)$ を求めることができる。

性質１： 直並列グラフ G について、$Rel(G)$ の計算オーダーは $O(m+n)$ である [証明略]。

従って直並列グラフによる edge-packing を多項式時間で構成できれば、all-terminal reliability の下界を求めることができる。

5. 提案するアルゴリズム１

以下に直並列グラフによる edge-packing を用いた all-terminal reliability の下界を求めるアルゴリズム LOW_BOUND_1 を示す。

procedure LOW_BOUND_1 (G)
　input： 確率グラフ $G=(V,E)$
begin
　while G が次数２以下の点、または平行枝を持つ **do**
　　３変換を適用して G を変換する；
　$\{G_i\}$ = S-P_EDGE_PACKING_1(G)；
　(1)式を用いて、$Rel(G)$ の下界を求める；
end

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

```
procedure  S-P_EDGE_PACKING_1(G)
  input：確率グラフ G（点数n、枝数m）
  output：グラフ G のエッジパッキング {Gi}
begin
  i=1；
  while  G が連結である do
  begin
    Gi ← G の最大木；
    Q ← 枝正常確率の大きい順に G−Gi の枝を格納；
    while  Q に要素がある  do
    begin
      e ← Q 中の先頭の枝；
      if  Gi ∪ e が直並列グラフ then
        G ← Gi ∪ e ；
      Q ← Q−e；
    end
    G ← G−Gi ；
    i ← i+1；
  end
end
```

アルゴリズム S-P_EDGE_PACKING_1 の概要は以下の通りである。まず G の最大木を G_1 とし、G から抜き出す。次に $e\in G-G_1$ について、枝正常確率の大きい枝から順に、$G_1\cup e$ が直並列グラフであるか確かめる。直並列グラフである場合は e を G_1 に加え、直並列グラフではなくなる場合、G_1 には加えない。直並列グラフであるか否かは、3変換を繰り返し適用して all-terminal reliability が求まるか否かで判断する。$G-G_1$ の全ての枝について確かめたら、残りの枝を G として、最大木 G_2 を抜き出し同様の処理を最大木が見つからなくなるまで繰り返す。

性質2： アルゴリズム LOW_BOUND_1 の計算オーダーは $O(m^3/n)$ である 。

6. 提案するアルゴリズム2

次に edge-packing 中の部分グラフの数を多くすることを重視したアルゴリズムを以下に示す。先のアルゴリズムでの S-P_EDGE_PACKING_1 を変更して、edge-packing の構成方法を変更する。

```
procedure  S-P_EDGE_PACKING_2(G)
  input：確率グラフ G（点数n、枝数m）
  output：グラフ G のエッジパッキング {Gi}
begin
  {Gi}←要素数最大（k とする）の G の枝排反極大木集合（ただし、Rel(Gi) ≥ Rel(Gj)  1 ≤ i ≤ j ≤ k）；
  i = 1；
  while  i ≦ k  do
  begin
    Q ← G − ∪_{i=1}^{k} Gi の枝を枝正常確率の大きい順に格納；
    while  Q に要素がある  do
    begin
      e ← Q 中の先頭の枝；
      if  Gi ∪ e が直並列グラフ then
        Gi ← Gi ∪ e ；
      Q ← Q−e；
    end
  end
  i ← i+1；
end
```

アルゴリズム S-P_EDGE_PACKING_2 の概要は以下の通りである。まず Edmonds のマトロイド分割アルゴリズム([3])を利用して、G から枝排反な最大木を最大個数 k 個抜き出し、all-terminal reliability の大きい順にそれぞれ G_i $(i=1,\cdots,k)$ とする。先のアルゴリズムと同様、余った枝を G_i $(i=1,\cdots,k)$ に加えたグラフが直並列グラフであるか否かを確かめる。先のアルゴリズムと比較して edge-packing を構成する部分グラフの数が大きくなるが、個々の部分グラフの all-terminal reliability は小さくなる。

性質3： アルゴリズム LOW_BOUND_1 中の S-P_EDGE_PACKING_1 を S-P_EDGE_PACKING_2 に変更したものを LOW_BOUND_2 とすると、アルゴリズム LOW_BOUND_2 の計算オーダーは $O(m^4/n)$ である 。

7. まとめ

本稿では直並列グラフによる edge-packing を用いて all-terminal reliability の下界を多項式時間で求めるアルゴリズムを2種類提案した。all-terminal reliability の下界を求めるアルゴリズムのほとんどが、各枝の枝正常確率が同一でないと適用できないのに対し、このアルゴリズムは各枝の枝正常確率が同一でない場合にも適用できるという利点がある。なおアルゴリズムにより得られる下界の数値結果は当日示す。

参考文献

[1] C. J. Colbourn, "The Combinatorics of Network Reliability", Oxford University Press, New York, 1987.

[2] 新森，小出，石井，"edge-packing による all-terminal reliability の一導出法"，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集, 221-222(1994).

[3] J. Edmonds, "Minimum partition of a matroid into independent subsets", *J. of the National Bureau of Standards*, **69B**, 67-72(1965).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.