2層型待ち行列網モデルの近似計算とその精度検証

01109700 NEC *蔵杉 俊康 KURASUGI Toshiyasu
01102990 NEC 紀 一誠 KINO Issei

1 はじめに

ソフトウェア資源の競合を表現する上位層とハードウェア資源の競合を表現する下位層の2層に切り分けてモデル化を行う、「2層型待ち行列網モデル」を紀は提案した[1]。2層型待ち行列網モデルには、1.上位層の各ステーション(後述)におけるサーバ数が無限である、2.上位層の各ステーションのサーバ数が有限で待ち行列が存在する、場合の2通りのモデルがある。1.の場合は定常分布を積形式解として陽に得ることができるが、2.の場合は状態数の大きなマルコフ連鎖を解く必要がある[1]。2.の場合において、マルコフ連鎖をそのまま解くと必要な計算量が大きくなりすぎるため、近似解法が提案されている[1]。

一般に、コンピュータネットワークにおいては、OSにより管理されるソフトウェア資源であるプロセスを割り当てられたトランザクションのみが、ハードウェア資源であるCPU、ディスク等を使用することができる。トランザクションは性質の異なる複数のプロセスを使用することにより処理を完了することが出来る。この時に割り当て可能なプロセス数に制限があると、プロセス競合が発生し、プロセス待ちが発生する。このようなシステムは、上記の2.の待ち行列が存在する2層型待ち行列網モデルを用いれば、自然なモデル化を行うことができる。本研究は、待ち行列が存在する2層型待ち行列網モデルの近似計算法の精度検証を行うものである。

2 2層型待ち行列網モデル

今回は図1で示されるモデルを例に取り、2層型待ち行列網モデルの近似計算法について説明する。このモデルでは、上位層では4人の客がステーション1とステーション2の間を巡回する。ステーションiにはk_i個の窓口があるとし、$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2)=(1,2)$とする。各ステーションにおける窓口は下位層への入口(下位層からの出口)に相当し、窓口に到達した客は下位層に進み、下位層を構成するノード間を推移する。客が下位層から戻って来るまでその窓口は占有される。各ノードにはサーバが1つずつ配置されており、ノードに到着した客はFIFOの規律にしたがいサーバを使用する。その時の使用時間は、順にパラメータ$\mu_1=5$, $\mu_2=7$, $\mu_3=6$の指数分布にしたがうものとする。

ステーションiの窓口から下位層へ進んだ客は以下の推移確率$S(i)$にしたがって推移する。

$$S(1)=\begin{array}{c}\nearrow\\ \text{上位層}\\ \text{ノード1}\\ \text{ノード2}\\ \text{ノード3}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{上位層}&\text{ノード1}&\text{ノード2}&\text{ノード3}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\6/7&0&0&1/7\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\quad S(2)=\begin{array}{c}\nearrow\\ \text{上位層}\\ \text{ノード2}\\ \text{ノード3}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{上位層}&\text{ノード2}&\text{ノード3}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\end{array}$$

このモデルにおいて状態を表現するには以下の確率変数

S_1: ステーション1にいる客数
N_1: ノード1でハードウェア資源を使用している客のステーションの番号
$N_j(0)$: ノードjでハードウェア資源を使用している客のステーションの番号 $(j=2,3)$
$N_j(l)$: ノードjのl番目のバッファにいるトランザクションのステーションの番号 $(j=2,3,\ l=1,2)$

を用意すれば良い。$N_1,N_j(l)$に客がいない時は0が入るものとする。

$\boldsymbol{z}=(\mathrm{S_1,N_1,N_2(0),N_2(1),N_2(2),N_3(0),N_3(1),N_3(2)})$とすると、$\boldsymbol{z}$が取り得る状態数は44状態となる。この44状態の推移はマルコフ連鎖を構成するので、定常分布$\Pr(\boldsymbol{z})$を求めることができる。また、この分布から各ステーション、各ノードにおける使用率や平均系内数などの統計値を求めることができる。この方法により求めた場合は、以後「厳密解法」により求めたと言うことにする。

3 近似解法の概略

このモデルの場合は 44 状態と状態数が多くないのでマルコフ連鎖として厳密解法により求めることができる。しかし、モデルが複雑になり状態数が多くなると必要となる計算量が指数的に増えてしまう。そこで、上位層と下位層を切り離す近似を行い、計算量を減らすことが必要となる。

上位層の状態はステーション数が2個のため、先に定義した S_1 のみにより表現できる。上位層の状態が S_1 のときには、下位層にはステーション1からの客が $n_1' = \min(1, S_1)$ 人、ステーション2から客が $n_2' = \min(2, 4-S_1)$ 人進んでいることになる。ここで図2のように上位層をまとめて、使用時間が0の仮想ノードとして捉え、ステーション1からの客が n_1' 人、ステーション2からの客が n_2' 人だけ推移する閉待ち行列網モデルを考える。この際の仮想ノード0における各ステーション i の客のスループットを $\tau_i(S_1)$ とする。この $\tau_i(S_1)$ は、下位層が積形式型の持ち行列網であるため陽に求めることができる。

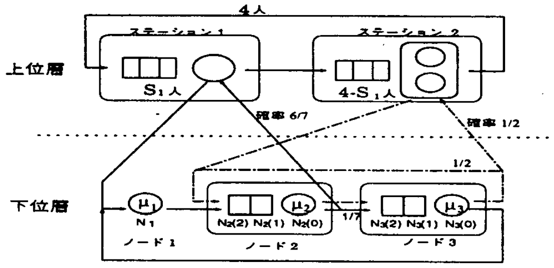

図 1: モデル

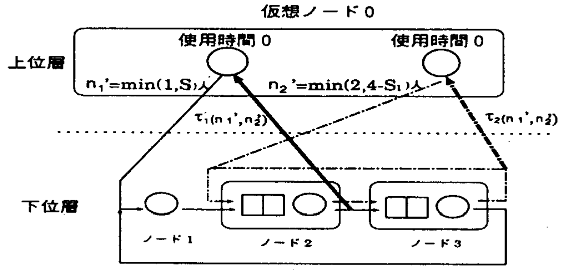

図 2: 閉待ち行列網としての近似

ここで、上位層における S_1 から $S_1 - 1$ の推移率を $\tau_1(S_1)$ で近似し、S_1 から $S_1 + 1$ の推移率を $\tau_2(S_1)$ で近似する。この時、上位層の状態推移は上述の推移率を持つマルコフ連鎖として近似することができ、$\Pr(S_1)$ の定常分布を求めることができる。この分布から各ステーションにおける使用率や平均系内数などの統計値を求めることができる。また、ノードに関する使用率や平均系内数などの統計値 L は、上位層の状態が S_1 の条件付の近似統計値 L_{S_1} を上述の閉待ち行列網モデルで求めてやり、$L = \sum_{S_1=0}^{4} Pr(S_1) L_{S_1}$ として求めることができる。この方法で統計値を求めた時は「近似解法」により求めたと以後は言うことにする。

4 数値計算による精度検証

		厳密	近似
スループット	ステーション1	1.8417	1.7806
	ステーション2	3.1571	3.0525
使用率	ステーション1	0.4205	0.3973
	ステーション2	0.9860	0.9785
	ノード1	0.3683	0.3561
	ノード2	0.7141	0.6904
	ノード3	0.5700	0.8602

		厳密	近似
係内数	ステーション1	0.5708	0.5750
	ステーション2	3.4292	3.4250
	ノード1	0.3683	0.3515
	ノード2	1.1760	1.1649
	ノード3	0.8302	0.8106

表 1: 数値検証

ノード2におけるステーション1の客のスループット、ノード3におけるステーション2の客のスループット、ステーション1,2、ノード1,2,3の使用率、ステーション1,2、ノード1,2,3の平均系内数を厳密解法、近似解法により求め、比較した結果が表1である。近似解法により求めた統計値は厳密解法により求めたものと比較して、実用的に十分な精度を持っていることがわかる。他にも多くのモデルに対して検証を行ったが、近似解法が十分な精度をもつことが確認できた。

今回の近似計算法は、下位層を積形式型の待ち行列網で置きかえることで、計算量を減らしている。しかし、上位層の定常分布はマルコフ連鎖を解くことで求めているために、上位層の構成が複雑になると計算量が増えてしまう。上位層も下位層と同様に積形式型の待ち行列網で置き換える近似を今後検討して行く必要がある。

参考文献: [1] I. Kino, "Two-layer Queueing Networks", *JORSJ*, vol.40, No.2 (1997).