カーンの倉庫問題について

01504364　近畿大学・商経学部　林　芳　男　HAYASHI Yoshio

（本文）カーンの倉庫問題とは Cahn [3] が 1948 年にアメリカ数学会報で発表した問題で「価格と費用が期間毎に変わっていく製品を考える。容量が一定の倉庫で初期在庫量が与えられているときのその製品の各期間毎の最適な購入(又は生産)、貯蔵、そして販売数量を決定せよ」という問題である。Charnes and Cooper [4,5] が 1955 年に LP に定式化し双対問題に書き直して解いたのに対し、少し遅れて Bellman [1] が [4] を参照しながら DP でアプローチした。チャーンズとクーパーの方法は最適解の構成法が一般的ではなかった。ベルマンの方法は誤った記法を使ったり正しくない図形を使ったりと、方法の主旨は伝わっているが、正しくないものであった。この発表ではその二つの方法を融合した林 (1997) による正しい最適解の構成法を紹介する。

Ａを倉庫の中のその製品の初期在庫量、Ｂを一定であるその製品の倉庫の容量であるとする。その製品は $i=1, 2, \cdots, n$ の各期間に買われ(又は生産され)、売られ、残りは貯蔵される。その製品の第ｉ期の一単位の仕入値を c_i, 売値を p_i とする。c_i, p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は既知である。その製品の第ｉ期の購入(又は生産)量を x_i, 販売量を y_i とし、各期末の手持在庫量は倉庫の容量を越えてはいけない、各期の販売量はその前期末残高を越えてはいけない、そして各期の購買・販売量は非負であるという条件の下でそのｎ期間全体の利益を最大化したいというのがその問題である。

ｋを１からｎまでの任意の数とする。第ｋ期からｎ期までの同じ問題で第ｋ期の期首在庫量がＡであるときの最適な目的関数の値を $f_{k,n}(A)$ で表す。つまり、

$$
\begin{aligned}
f_{k,n}(A) \triangleq \mathrm{Max}\ \{ & \sum_{j=k}^{n} (p_j y_j - c_j x_j) : \\
& A + \sum_{j=k}^{i} (x_j - y_j) \leqq B \ (i=k, \cdots, n),\ y_k \leqq A, \\
& y_i \leqq A + \sum_{j=k}^{i-1} (x_j - y_j) \ (i=k+1, \cdots, n) \\
& x_i, y_i \geqq 0 \ (i=k, 2, \cdots, m)\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

とおく。そうすると

$$
f_{n,n}(A) = \mathrm{Max}\ \{p_n A,\ 0\} \ (\text{最適解は } p_n > 0 \text{ のときは } x_n = 0,\ y_n = A\text{；そうでないときは } x_n = y_n = 0) \tag{2}
$$

そして $1 \leqq k < n$ なる任意の期の数ｋに対して

$$
\begin{aligned}
f_{k,n}(A) = \underset{x_k, y_k}{\mathrm{Max}}\ \{ & p_k y_k - c_k x_k + f_{k+1,n}(A + x_k - y_k) : \\
& A + x_k - y_k \leqq B,\ y_k \leqq A,\ x_k \geqq 0,\ y_k \geqq 0\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

となることが分かる。求めたいのは $f_{1,n}(A)$ の値である。これらの問題の最適解は、目的関数も制約式も線形であるから、(3)の制約領域の端点で生ずる。その制約領域の端点 (x_k, y_k) は $(0, 0)$, $(0, A)$, (B, A), $(B-A, 0)$ だけであるから

$$
\begin{aligned}
f_{k,n}(A) = \mathrm{Max}\ \{ & f_{k+1,n}(A),\ p_k A + f_{k+1,n}(0), \\
& p_k A - c_k B + f_{k+1,n}(B),\ -c_k(B-A) + f_{k+1,n}(B)\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

となることが分かる。(2), (4)の関係式から $f_{1,n}(A)$ を求めるというのがベルマンのアプローチである。

他方、問題 $f_{k,n}(A)$ の双対問題を最初の型の不等号制約に対する双対変数を t_i, その次の型の不等号制約に対する双対変数を u_i $(i=k, \cdots, n)$ として

$$
T_k \triangleq \sum_{j=k}^{n} t_j,\ U_k \triangleq \sum_{j=k}^{n} u_j \ (k=1, 2, \cdots, n) \tag{5}
$$

という変換をして書き下すと

$$(D_k)\quad\left|\begin{array}{l}\text{目的関数：}(B-A)T_k+AU_k \longrightarrow \text{最小化}\\ \text{制約条件：}T_j-U_{j+1}\geqq -c_j\ (j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n\ ;\ \text{但し、}U_{n+1}=0)\\ \qquad -T_j+U_j\geqq p_j\ (j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n)\\ \qquad T_k\geqq T_{k+1}\geqq\cdots\geqq T_n\geqq 0,\\ \qquad U_k\geqq U_{k+1}\geqq\cdots\geqq U_n\geqq 0.\end{array}\right.$$

となる。求めたい最小の値は（D_1）のものであるが、それは$T_{n+1}\triangleq 0$, $U_{n+1}\triangleq 0$ と置いて $j=n,\ n-1,\ \cdots,\ 1$ の順番に

$$T_j \leftarrow \mathrm{Max}\,\{U_{j+1}-c_j,\ T_{j+1}\}\ ;\ U_j \leftarrow \mathrm{Max}\,\{p_j+T_j,\ U_{j+1}\} \tag{6}$$

とおいて行けば得られる。これがチャーンズ・クーパーのアプローチである。

この二つの方法は、こうして得られた最適なT_k, U_k（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）の値を使うと任意の $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ と $A\in[0,\ B]$ に対して

$$f_{k,n}(A)=(B-A)T_k+AU_k \tag{7}$$

が成り立つということで繋がる。したがって、

$$T_k=f_{k,n}(0)/B,\ U_k=f_{k,n}(B)/B \tag{8}$$

となる。また、(8)を(7)に代入して

$$f_{k,n}(A)=(1-A/B)f_{k,n}(0)+(A/B)f_{k,n}(B) \tag{9}$$

を得る。ベルマンの方法の良い所は漸化式の右辺の最大値がどの項で達成されるかで主問題の最適解が決まることであった。チャーンズ・クーパーの方法の良い所は最適な(変換された)双対解T_k, U_k（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）が(6)で効率的に計算できることであった。この二つの方法を融合させて対応する主問題（P）の最適解を決定することができる。問題$f_{k,n}(A)$の最適解を（$n-k+1$）次元の二つのベクトル $x_{k,n}^{(A)}\triangleq(x_k,\ x_{k+1},\ \cdots,\ x_n)^T$, $y_{k,n}^{(A)}\triangleq(y_k,\ y_{k+1},\ \cdots,\ y_n)^T$ で表す。そうすると、(4.3) より問題$f_{k,n}(A)$の最適解は $A=0$, B のときの最適解を使って

$$\begin{aligned}x_{k,n}^{(A)}&=(1-A/B)x_{k,n}^{(0)}+(A/B)x_{k,n}^{(B)}.\\ y_{k,n}^{(A)}&=(1-A/B)y_{k,n}^{(0)}+(A/B)y_{k,n}^{(B)}\end{aligned} \tag{10}$$

で決まる。この右辺に並ぶ最適解は最適なt_k, u_kの値を使って以下のように決定される。

$t_k=0 \Rightarrow x_{k,n}^{(0)}=(0,\ x_{k+1,n}^{(0)}),\ y_{k,n}^{(0)}=(0,\ y_{k+1,n}^{(0)})$

$t_k>0 \Rightarrow x_{k,n}^{(0)}=(B,\ x_{k+1,n}^{(B)}),\ y_{k,n}^{(0)}=(0,\ y_{k+1,n}^{(B)})$

$u_k=0 \Rightarrow x_{k,n}^{(B)}=(0,\ x_{k+1,n}^{(B)}),\ y_{k,n}^{(B)}=(0,\ y_{k+1,n}^{(B)})$

$u_k>0,\ t_k=0 \Rightarrow x_{k,n}^{(B)}=(0,\ x_{k+1,n}^{(0)}),\ y_{k,n}^{(B)}=(B,\ y_{k+1,n}^{(0)})$

$u_k>0,\ t_k>0 \Rightarrow x_{k,n}^{(B)}=(B,\ x_{k+1,n}^{(B)}),\ y_{k,n}^{(B)}=(B,\ y_{k+1,n}^{(B)})$

参考文献

[1] Bellman, R.,"On the Theory of Dynamic Programming — A Warehousing Problem", Management Science 2, 272-275 (1956)

[2] Bellman, R.,Dynamic Programming, 1957 Princeton University Press

[3] Cahn, A.S.,"The Warehouse Problem", Bull. Math. Soc., Vol. 54 (1948), p.1073.

[4] Charnes, A., and Cooper, W.W.,"Generalizations of the Warehousing Model", O.N.R. Research Memorandum, No.34, 1955, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology.

[5] 林 芳男、「カーンの倉庫問題について」近畿大学商経学部・商経学叢 1997 印刷中