1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一様な需要分布における競合在庫問題

02501614　大阪府立大学　*北條仁志　HOHJO Hitoshi
01302694　大阪府立大学　寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu

1．はじめに

これまでに扱われている在庫問題では、一企業内における在庫の最適化を求めるものが多かった。しかしながら二つの企業が競合する時には、それぞれの企業がどのような戦略をとればよいのであろうかということを考える必要が現れてくる。我々はこれを部分的にではあるが、ゲーム理論的に解析を進める。

本稿では、製品を同価格で販売する二つの企業が直線上の市場に一様に分布している顧客に対して商品を提供するモデルについて考察をおこなう。またモデルでは計算を簡単にするため、企業を線分上の両端に配置するものとする。主な目的は[1]でも見うけられるように、発注や維持、不足を考慮した総コストを最小にする最適発注量を求めることとする。

2．モデル

2人のPlayer I, IIが価格rの同一製品を販売するために長さ1の線分上に同時に店を出し、市場を分け合う。$[0,1]$区間においてPlayer Iの位置を0、Player IIの位置を1に配置するとする。各playerの発注量$z_i, i=1,2$は単価$c_i, i=1,2$で期首に入荷される。ただし$r \geq c_i$とする。このモデルでは不足が生じた場合、バックログされないものとする。playerは在庫がなければ信用を失うという意味でペナルティを受ける。そのときの単位当たりのペナルティコストをp_iとする。また、余剰品に対して単位当たりh_iの維持費用がかかる。bを市場上で与えられた客数（需要量）とする。客は$[0,1]$区間上に一様に分布しており、一人一個の製品を距離の近い方の店へまず買いに行き、在庫がなければもう一方の店へ買いに行くものとする。この時需要をみたされない客もいることに注意せよ。客は各地点を同時に出発し、到着時間は移動距離に比例するとする。そのときの単位当たりの移動時間をtとおくと、計画期間としては$\frac{3}{2}t$であると考えることができる。Player I, IIは非協力的であるとする。各playerの目的は総コストを最小にすることである。その時、各playerは期首にどれだけ発注しておけばよいのであろうか。そこで発注量z_1, z_2は独立に決定される。

$C_j^i(z_1,z_2), j=1,\cdots,6$を期平均コストとする。まず、発注量$z_i$と需要量$b$の関係によりいくつかの場合分けが必要となる。その各場合の期平均コストを計算し、最適発注量z_1^*, z_2^*とその時の最小コストを求めると次のような式が得られる。ここでは最適発注量を求めるため、minimax基準を用いた。

Case 1.　$z_1 \geq \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$の場合

$$z_1^* = \frac{b}{2},\ C_1^1(z_1^*,z_2) = \left(\frac{c_1}{2}+\frac{h_1}{12}-\frac{r}{2}\right)b \quad ; \quad z_2^* = \frac{b}{2},\ C_1^2(z_1,z_2^*) = \left(\frac{c_2}{2}+\frac{h_2}{12}-\frac{r}{2}\right)b.$$

Case 2.　$0 \leq z_1 < \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$の場合　$z_1+z_2 \geq b$のとき

(i) $r \geq c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$のとき　$z_1^* = \frac{b}{2},\ C_2^1(z_1^*,z_2) = \left(\frac{c_1}{2}+\frac{h_1}{12}-\frac{r}{2}\right)b.$

(ii) $r < c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$のとき　$z_1^* = \frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b,\ C_2^1(z_1^*,z_2) = \left\{\frac{5}{12}p_1 - \frac{3(r-c_1+p_1)^2}{4(h_1+p_1)}\right\}b.$

$$z_2^* = \frac{b}{2},\ C_2^2(z_1,z_2^*) = \left(\frac{c_2}{2}-r\right)b + \left(\frac{1}{3}h_2+r\right)z_1 - \frac{h_2 z_1^2}{3b}.$$

Case 3.　$0 \leq z_1 < \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$の場合　$z_1+z_2 < b$のとき

(i) $r \geq c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$のとき　$z_1^* = \frac{b}{2},\ C_3^1(z_1^*,z_2) = \left(\frac{c_1}{2}+\frac{h_1}{12}-\frac{r}{2}\right)b.$

(ii) $r < c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$のとき　$z_1^* = \frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b,\ C_3^1(z_1^*,z_2) = \left\{\frac{5}{12}p_1 - \frac{3(r-c_1+p_1)^2}{4(h_1+p_1)}\right\}b.$

(i) $c_2 \leq r < c_2 + \frac{2}{3}h_2 - \frac{1}{3}p_2$のとき　$z_2^* = \frac{b}{2},\ C_3^2(z_1,z_2^*) = \frac{p_2 z_1^2}{3b} - \frac{p_2}{3}z_1 + \left(\frac{c_2}{2}-\frac{r}{2}+\frac{h_2}{12}+\frac{p_2}{12}\right)b$

(ii) $c_2 + \frac{2}{3}h_2 - \frac{1}{3}p_2 \leq r < c_2 + \frac{4h_2-p_2}{6}$のとき　$z_2^* = \frac{(3r-3c_2-h_2+2p_2)}{2(h_2+p_2)}b,$

$$C_3^2(z_1,z_2^*) = \frac{p_2 z_1^2}{3b} + \left(r-c_2-\frac{2}{3}h_2\right)z_1 + \left(\frac{1}{3}p_2-\frac{1}{6}h_2\right)b - \frac{(3r-3c_2-h_2+2p_2)^2}{12(h_2+p_2)}b.$$

(iii) $c_2 + \frac{4h_2-p_2}{6} \leq r < c_2 + \frac{6h_2+p_2}{6}$のとき　$z_2^* = \frac{2h_2+3p_2}{4(h_2+p_2)}b,$

$$C_3^2(z_1,z_2^*) = \frac{p_2 z_1^2}{3b} - \frac{p_2}{6}z_1 + \frac{(2h_2+3p_2)^2}{48(h_2+p_2)}b - \frac{h_2-2p_2}{6}b - \frac{(3r-3c_2-h_2+2p_2)(2h_2+3p_2)}{12(h_2+p_2)}b.$$

(iv) $r \geq c_2 + \frac{6h_2+p_2}{6}$のとき　$z_2^* = \frac{(3r-3c_2-2h_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b,$

$$C_3^2(z_1,z_2^*) = \frac{p_2 z_1^2}{3b} + \left(r-c_2-h_2-\frac{1}{3}p_2\right)z_1 + \left(\frac{1}{3}p_2-\frac{1}{6}h_2\right)b - \frac{(3r-3c_2-2h_2+p_2)(r-c_2+p_2)}{4(h_2+p_2)}b.$$

Case 4. $0 \le z_1 < \frac{b}{2}$かつ$0 \le z_2 < \frac{b}{2}$の場合

$z_1^* = \frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b,\ C_4^1(z_1^*, z_2) = \frac{p_1 z_2^2}{3b} - \frac{p_1}{3}z_2 + (\frac{p_1}{2} - \frac{3(r-c_1+p_1)^2}{4(h_1+p_1)})b.$

$z_2^* = \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b,\ C_4^2(z_1, z_2^*) = \frac{p_2 z_1^2}{3b} - \frac{p_2}{3}z_1 + (\frac{p_2}{2} - \frac{3(r-c_2+p_2)^2}{4(h_2+p_2)})b.$

Case 5. $z_1 \ge \frac{b}{2}$かつ$0 \le z_2 < \frac{b}{2}$の場合　　$z_1 + z_2 \ge b$のとき

$z_1^* = \frac{b}{2},\ C_5^1(z_1^*, z_2) = (\frac{c_1}{2} - r)b + (\frac{1}{3}h_1 + r)z_2 - \frac{h_1 z_2^2}{3b}.$

(i) $r \ge c_2 + \frac{1}{3}h_2 - \frac{2}{3}p_2$のとき　　$z_2^* = \frac{b}{2},\ C_5^2(z_1, z_2^*) = (\frac{c_2}{2} + \frac{h_2}{12} - \frac{r}{2})b.$

(ii) $r < c_2 + \frac{1}{3}h_2 - \frac{2}{3}p_2$のとき　　$z_2^* = \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b,\ C_5^2(z_1, z_2^*) = \{\frac{5}{12}p_2 - \frac{3(r-c_2+p_2)^2}{4(h_2+p_2)}\}b.$

Case 6. $z_1 \ge \frac{b}{2}$かつ$0 \le z_2 < \frac{b}{2}$の場合　　$z_1 + z_2 < b$のとき

(i) $c_1 \le r < c_1 + \frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}p_1$のとき　　$z_1^* = \frac{b}{2},\ C_6^1(z_1^*, z_2) = \frac{p_1 z_2^2}{3b} - \frac{p_1}{3}z_2 + (\frac{c_1}{2} - \frac{r}{2} + \frac{h_1}{12} + \frac{p_1}{12})b$

(ii) $c_1 + \frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}p_1 \le r < c_1 + \frac{4h_1-p_1}{6}$　　$z_1^* = \frac{(3r-3c_1-h_1+2p_1)}{2(h_1+p_1)}b,$

$C_6^1(z_1^*, z_2) = \frac{p_1 z_2^2}{3b} + (r - c_1 - \frac{2}{3}h_1)z_2 + (\frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{6}h_1)b - \frac{(3r-3c_1-h_1+2p_1)^2}{12(h_1+p_1)}b.$

(iii) $c_1 + \frac{4h_1-p_1}{6} \le r < c_1 + \frac{6h_1+p_1}{6}$のとき　　$z_1^* = \frac{2h_1+3p_1}{4(h_1+p_1)}b,$

$C_6^1(z_1^*, z_2) = \frac{p_1 z_2^2}{3b} - \frac{p_1}{6}z_2 + \frac{(2h_1+3p_1)^2}{48(h_1+p_1)}b - \frac{h_1-2p_1}{6}b - \frac{(3r-3c_1-h_1+2p_1)(2h_1+3p_1)}{12(h_1+p_1)}b.$

(iv) $r \ge c_1 + \frac{6h_1+p_1}{6}$のとき　　$z_1^* = \frac{(3r-3c_1-2h_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b,$

$C_6^1(z_1^*, z_2) = \frac{p_1 z_2^2}{3b} + (r - c_1 - h_1 - \frac{1}{3}p_1)z_2 + (\frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{6}h_1)b - \frac{(3r-3c_1-2h_1+p_1)(r-c_1+p_1)}{4(h_1+p_1)}b.$

(i) $r \ge c_2 + \frac{1}{3}h_2 - \frac{2}{3}p_2$のとき　　$z_2^* = \frac{b}{2},\ C_6^2(z_1, z_2^*) = (\frac{c_2}{2} + \frac{h_2}{12} - \frac{r}{2})b.$

(ii) $r < c_2 + \frac{1}{3}h_2 - \frac{2}{3}p_2$のとき　　$z_2^* = \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b,\ C_6^2(z_1, z_2^*) = \{\frac{5}{12}p_2 - \frac{3(r-c_2+p_2)^2}{4(h_2+p_2)}\}b.$

3．平衡解析

上で得られた最適発注量z_1^*, z_2^*を各playerの戦略の候補とし、平衡点を求める。
$c_1 \le r < c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$かつ$c_1 \le r < c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1$の場合のみをここで示す。

この時、Player Iの戦略は$z_1^* = \frac{b}{2}$と$\frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b$である。また、Player IIの戦略も$z_2^* = \frac{b}{2}, \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b$である。これを次のような利得行列で表す。

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (C_1^1(z_1^*, \frac{b}{2}), C_1^2(\frac{b}{2}, z_2^*)) & (C_6^1(z_1^*, \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b), C_6^2(\frac{b}{2}, z_2^*)) \\ (C_3^1(z_1^*, \frac{b}{2}), C_3^2(\frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b, z_2^*)) & (C_4^1(z_1^*, \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b), C_4^2(\frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b, z_2^*)) \end{pmatrix} \end{array}$$

そこでI_1,I_2はPlayer Iの戦略、II_1,II_2はPlayer IIの戦略であり、$\mathrm{I}_1 = \mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}, \mathrm{I}_2 = \frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b, \mathrm{II}_2 = \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b$。

$$C_1^1 - C_3^1 = C_6^1 - C_4^1 = \frac{3}{4(h_1+p_1)}(r - \frac{3c_1 + h_1 - 2p_1}{3})^2 \ge 0$$

$$C_6^1 - C_1^1 = C_4^1 - C_3^1 = \frac{3}{4(h_2+p_2)^2}(r - \frac{3c_2 + h_2 - 2p_2}{3})^2 \ge 0$$

であるので、囚人のジレンマ型の行列となり、平衡点は(C_4^1, C_4^2)である。
よって平衡点は$z_1^* = \frac{3(r-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}b, z_2^* = \frac{3(r-c_2+p_2)}{2(h_2+p_2)}b$である。
この他の結果については当日発表する予定である。

4．おわりに

今後の研究課題として次のようなものが挙げられる。

1. 情報が不完全である場合の考察。
2. ２人のプレイヤーが互いに協力できる場合の分析。
3. プレイヤーが３人以上いるモデルについて。
4. 客が一般的な分布に従うモデルについて。

参考文献

［1］ 児玉正憲：『生産・在庫管理システムの基礎』九州大学出版会, 1996.

［2］ Hotelling,H. stability in competition, Economic Journal vol.39, pp.41-57, 1929.