1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

A Nonpreemptive Priority MAP/G/1 Queue with Two Classes of Customers

大阪大学　　滝根哲哉

1　MAP 到着過程

優先権を持つ待ち行列に関する従来の研究の多くは各優先権クラスの客がポワソン過程に従っての到着すると仮定されてきた。しかしながら、BISDN 網において顕著に現れるように、一般に、各クラスの客の到着には相関があり、これらに対してポワソン到着を仮定することが困難な場合が多く見られる。

本稿では各優先権クラスの客の到着が MAP (Markovian Arrival Process) に従う待ち行列を考える。MAP は [2] において初めて導入された有限状態マルコフ連鎖によって変調される到着過程であり、位相型分布やマルコフ変調過程の重畳を含んでいる。さらに、MAP はあらゆる単純な定常点過程を任意の精度で近似できるため [1]、解析的な取り扱いが可能な最も一般的な確率過程の一つと見ることが出来る。

MAP における到着を支配する連続時間マルコフ連鎖の状態数を M で表す。この時 MAP は2つの $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ で表現される。ここで $\boldsymbol{C}$ の対角要素は負であり、$\boldsymbol{C}$ の他の要素並びに$\boldsymbol{D}$ の全ての要素は非負である。さらに、到着を支配するマルコフ連鎖の無限小作用素は $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ で与えられる。MAP では $\boldsymbol{D}$ で記述される状態遷移が起こった時、一人の客が到着する。以下では、筆者が行ってきた複数の MAP 到着流を持つ待ち行列に関する一連の研究の概要を簡単に紹介する。

2　従来の行列解析法

MAP 到着を持つ待ち行列は通常、Neuts らによって提案された行列解析法（matrix analytic method）を用いて解析される [3]。この手法は、客の離脱時点における待ち行列長 X_n（レベル変数）と MAP の状態 S_n（フェーズ変数）で構成される2変数隠れマルコフ連鎖 (X_n, S_n) において、レベル変数が一回の遷移で高々1つしか値が小さくならない性質（skip free to the left）を利用して、性能評価指標を得るための（行列を含む）数値計算アルゴリズムを構築するものである。一般に、行列解析法は、多変数マルコフ連鎖において高々1つの可算無限個の状態を取り得る（skip free to the left な）レベル変数を含むときのみ、適用可能である。

ここで、複数の MAP 到着流を持つ待ち行列を考える。MAP の重畳は MAP で表現できる。しかし、サービス時間分布が到着流毎に異なる場合、一見、最も単純と思われる FIFO $\sum_i \mathrm{MAP}_i/\mathrm{G}_i/1$ 待ち行列においてさえ、客の離脱時点での待ち行列長が隠れマルコフ連鎖を構成しないため、従来の行列解析法は適用できない。また、これらの到着流に優先権が付けられている場合は、可算無限個の状態を取り得る複数のレベル変数（各クラスの客数）が存在するため、行列解析法はそのまま適用できない。このように、従来の行列解析法の複数の MAP 到着流を持つ待ち行列への適用範囲はかなり狭いものであった。

3　複数の MAP 到着流を持つ待ち行列

これらの困難を打破すべく、筆者らはこの5年に渡って複数の MAP 到着流を持つ待ち行列に対する様々な解析的道具や基本的な解析結果を用意してきた。まず、[7] において、共通のサービス時間分布を持つ非割込み優先権 MAP/G/1 の解析を行った。この最も単純な場合の解析を通じて、客の離脱直後にシステムが空であるという条件の下でのフェーズ変数の分布が、非割込み優先権 MAP/G/1 の解析の鍵となることを認識した。

この条件付きフェーズ分布は、システムが空であるという条件の下でのフェーズ変数の時間平均分布から容易に得られること、ならびに、非割込み優先権は仕事量保存型サービス規律であるため、この時間平均分布は系内仕事量を解析することにより得られることに注目し、[4] において、サービス時間分布の異なる複数の MAP 到着流を持つ MAP/G/1 を特別な場合として含む、サービス時間分布がフェーズ変数の値に依存する MAP/G/1 の系内仕事量の解析を行った。従来の行列解析法が skip free to the left な離散時間2変数マルコフ連鎖のアルゴリズム的解析法であったのに対し、[4] で示された結果は skip free to the left な連続時間2変数マルコフ連鎖のアルゴリズム的解析法と見ることが出来る。さらに [4] では、サービス時間分布が異なる複数の MAP 到着流を持つ割込み継続型優先権 MAP/G/1 の遅延特性が、この結果を応用すれば容易に引き出せる

ことが示されている。

4 非割込み優先権 MAP/G/1

以下では [6] 示された、2つのクラスからなる非割込み優先権 MAP/G/1 の解析のうち客数分布に関する結果の概略を紹介する。高い優先権を持つ客（クラス H）および低い優先権を持つ客（クラス L）は、それぞれ、$(\widetilde{\boldsymbol{C}}_H, \widetilde{\boldsymbol{D}}_H)$、$(\widetilde{\boldsymbol{C}}_L, \widetilde{\boldsymbol{D}}_L)$ で表される MAP に従い到着する。2つのクラスのサービス時間分布関数をそれぞれ $H_H(x)$、$H_L(x)$ とする。さらに、以下の行列を定義する。

$$\boldsymbol{D}_H = \widetilde{\boldsymbol{D}}_H \otimes \boldsymbol{I}_L,\ \boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{I}_H \otimes \widetilde{\boldsymbol{D}}_L$$
$$\boldsymbol{C} = \widetilde{\boldsymbol{C}}_H \oplus \widetilde{\boldsymbol{C}}_L$$

$\boldsymbol{X}_H(z)$ をクラス H の客の離脱直後における、クラス H の客数分布のベクトル母関数とし、$\boldsymbol{Y}_H(z)$ をクラス H の時間平均客数分布のベクトル母関数とする。クラス L に対しても同様に $\boldsymbol{X}_L(z)$、$\boldsymbol{Y}_L(z)$ を定義する。この時

$$\boldsymbol{Y}_H(z)(\boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D}_H + \boldsymbol{D}_L) = \lambda_H(1-z)\boldsymbol{X}_H(z)$$
$$\boldsymbol{Y}_L(z)(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}_H + z\boldsymbol{D}_L) = \lambda_L(1-z)\boldsymbol{X}_L(z)$$

が成立する [7]。ただし λ_x はクラス x の平均到着率である。これより各クラスの客の離脱直後における客数分布 $\boldsymbol{X}_x(z)$ を求めれば、各クラスの客数の時間平均分布 $\boldsymbol{Y}_x(z)$ が得られることが分かる。

定常状態における任意の客の離脱直後の各クラスの客数の結合ベクトル母関数 $\boldsymbol{P}^*(z,\omega)$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^*(z,\omega) &= [\boldsymbol{P}^*(z,\omega) - \boldsymbol{P}^*(0,\omega)]\,\boldsymbol{A}^*(z,\omega)/z \\ &+ [\boldsymbol{P}^*(0,\omega) - \boldsymbol{P}^*(0,0)]\,\boldsymbol{B}^*(z,\omega)/\omega + \boldsymbol{P}^*(0,0) \\ &\cdot(-\boldsymbol{C})^{-1}[\boldsymbol{D}_H\boldsymbol{A}^*(z,\omega) + \boldsymbol{D}_L\boldsymbol{B}^*(z,\omega)] \qquad (1)\end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{A}^*(z,\omega) = \int_0^\infty e^{(\boldsymbol{C}+z\boldsymbol{D}_H+\omega\boldsymbol{D}_L)x}dH_H(x)$$
$$\boldsymbol{B}^*(z,\omega) = \int_0^\infty e^{(\boldsymbol{C}+z\boldsymbol{D}_H+\omega\boldsymbol{D}_L)x}dH_L(x)$$

である。$\boldsymbol{X}_H(z)$ を得るためには $\boldsymbol{P}(z,1)$ を、また、$\boldsymbol{X}_L(z)$ を得るためには $\boldsymbol{P}(0,z)$ を得る必要がある。(1) において $w \to 1$ とすると、$\boldsymbol{P}(z,1)$ は未知のベクトル$\boldsymbol{P}(0,1)$、$\boldsymbol{P}(0,0)$ を用いて表すことが出来る。$\boldsymbol{P}(0,0)$ は客の離脱時点でシステムが空の場合の MAP の状態の分布を表しており、これは [4] の結果を用いて求めることが出来る。一方、$\boldsymbol{P}(0,1)$ は $\boldsymbol{P}(0,z)$ が得られれば、直ちに求められる。

$\boldsymbol{P}(0,z)$ は任意の客の離脱直後にクラス H の客がいない場合のクラス L の客数分布を表している。これは、クラス H、ならびに L のサービスを初期遅延とした、クラス H によって引き起こされる遅延サイクル内に到着するクラス L の客数分布によって表現でき、[4] と同様の考え方により導くことが出来る。なお [6] では、各クラスの待ち時間分布の LST も導出している。

このような行列／ベクトルを用いた解析では、単に公式を書き下すだけではなく、それらを元にして性能尺度を如何にして計算するかが重要である。[6] では、客数分布を計算するために必要な諸量の計算手法についても詳しく述べ、各クラスの客数分布に対する数値例も与えている。

References

[1] Asmussen, S. and Koole, G.: Marked point processes as limits of Markovian arrival streams. *J. Appl. Prob.*, vol.30 (1993) 365–372.

[2] Lucantoni, D.M., Meier-Hellstern, K.S. and Neuts, M.F.: A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes. *Adv. Appl. Prob.*, vol.22 (1990) 676–705.

[3] Neuts, M.F.: *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications.* Marcel Dekker, New York (1989).

[4] Takine, T. and Hasegawa, T.: The workload in the *MAP/G/1* queue with state-dependent services: its application to a queue with preemptive resume priority. *Stoch. Mod.*, vol.10 (1994) 183–204.

[5] Takine, T., Matsumoto, Y., Suda, T. and Hasegawa, T.: Mean waiting times in nonpreemptive priority queues with Markovian arrival and i.i.d. service processes. *Perfor. Eval.*, vol.20 (1994) 131–149.

[6] Takine, T.: A nonpreemptive priority MAP/G/1 queue with two classes of customers. *J. of ORSJ* vol.39 (1996) 266–290.

[7] Takine, T. and Takahashi, Y.: On the relationship between queue lengths at a random instant and at a departure in the stationary queue with BMAP arrivals. to appear in *Stoch. Mod.* (1998).