1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

アフィンスケーリング法の数理

01305590　統計数理研究所　土谷　隆　TSUCHIYA Takashi

アフィンスケーリング法 [1] は 1967 年にロシアの数学者 I. I. Dikin によって発見された線形計画問題に対する世界で最初の単純な内点法である．この方法は古典的な内点法アルゴリズムの一つとしてさまざまな興味深い性質を持ち，さらにその数学的構造は可積分系，情報幾何学やカオスなど数理科学の諸分野とも広く関係している．Karmarkar 法との関係で AT&T がこの方法の特許をとったことや，1984 年の Karmarkar 法発見後，Vanderbei や Barnes らがこの方法を "再発見" し，その数年後に Dikin が第一発見者として名乗り出たことなど，周辺的なエピソードにも事欠かない．本発表では，発表者の研究成果を中心に，アフィンスケーリング法のさまざまな側面について紹介する．

内点許容解 ($x > 0$ を満たす許容解) と最適解を持つような，次の線形計画問題を考えよう．

$$\text{minimize}_{\ x}\ \ c^T x,\ \ \text{subject to}\ \ Ax = b,\ \ x \geq 0,\ \ c, x \in \mathbf{R}^n,\ \ \ A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ \ \ b \in \mathbf{R}^m. \tag{1}$$

今，内点許容解 x が与えられたとして，目的関数の降下方向を生成しその方向に進んで新たな内点許容解を得ることを繰り返す反復法で，この問題を解くことを考える．この時注意したいことは，対角成分が正の対角行列 Dで変数 x をスケーリングして得られる線形計画問題

$$\text{minimize}_{\ x'}\ \ (D^{-1}c)^T x',\ \ \text{subject to}\ \ AD^{-1}x' = b,\ \ x' \geq 0$$

は元の問題とまったく等価であり，生成される降下方向はどちらの問題 (表現) を元にしても，同じものであることが望ましいということである．

このような探索方向を得る一番簡単な方法は次のようにすることであろう．x が $(1,...,1)$ になるように変数をスケーリングした問題

$$\text{minimize}_{\ u}\ \ (Xc)^T u,\ \ \text{subject to}\ \ AXu = b,\ \ u \geq 0$$

を考える．ここで $X = \mathrm{diag}(x)$ である．そしてこの問題の空間で，目的関数ベクトル Xc を，制約領域の接空間 Ker AX に通常の Euclid 幾何の意味で射影して得られる方向 (の逆方向) を探索方向として採用するのである．

この方向は，元の問題の空間では KerAX への射影を $P(x)$ として，$d(x) = -XP(x)Xc$ と書ける．そこで，x から $d(x)$ の方向に，境界にぶつかるまでの比率 $\lambda \in (0,1)$ だけ進んだ点を新たな内点許容解とし，反復を繰り返すことを考える．これがステップ幅 λ のアフィンスケーリング法である．実際数十万変数の大きさの問題を解くことがこの方法で可能である．

このアルゴリズムは，双対理論や相補性問題の立場から次のように眺めることもできる．問題 (1) の双対問題は

$$\text{maximize}_{\ (y,s)}\ \ b^T y,\ \ \ \text{subject to}\ \ A^T y + s = c,\ \ \ \ \ \ s \geq 0, \tag{2}$$

である．主問題，双対問題の任意の許容解 x, (s,y) について $c^T x - b^T y = s^T x \geq 0$ が成り立ち，等号は双対定理より x, (s,y) が主，双対問題の最適解である場合にのみ成立する．$x, s \geq 0$ を考慮すると，主問題と双対問題を解くことは，次の相補性問題を解くことと等価である:

$$Xs = 0,\ Ax = b,\ A^T y + s = c,\ x \geq 0,\ s \geq 0.$$

さて，内点許容解 x が与えられた時に，双対問題の最適解を推定することを考えよう．上の方程式で s に関する不等号を無視して，$Xs = 0$ に関する残差ノルムを最小化するように s と yを定めて双対問題の推定値とし，これを双対推定と呼ぶことにする．双対推定は次の最小二乗問題

$$\text{minimize}_{\ (y,s)}\ \ \frac{1}{2}\|Xs\|^2,\ \ \ \text{subject to}\ \ A^T y + s = c$$

の解である．双対推定を $(\hat{s}(x), \hat{y}(x))$ とすると，先ほど定義した探索方向 $d(x)$ は$-X^2\hat{s}(x)$ と書ける．このように，探索方向と双対推定は密接な関係がある．実は Dikin は Kantorovich のポスドクとして Kantorovich とともに旧ソ連の農業データを解析していたことがあり，その時 (1965 年) に主問題の変数から双対問題の変数を推定するために，上の最小二乗問題で重みを x_i^2の代わりにx_iとしたものを用いた．その考えを発展させて上述の双対推定の着想に到り，そこからアフィンスケーリング法を考案したということである．

アフィンスケーリング法の収束性については次の結果が知られている [2,3].

定理 λを 2/3 以下にとれば，アフィンスケーリング法の生成する主許容解の点列は主問題 (1) の最適解の相対的内点に収束し，双対変数は双対問題 (2) の最適解の解析的中心 (双対問題の最適解の特別な相対的内点) に収束し，漸近的に目的関数は収束率 $1-\lambda$ の 1 次収束をする．

驚くべきことに，この 2/3 という数値は，主変数，双対推定が一点に収束するステップ幅の上限になっている [3, 4]．この結果は，λ を 2/3 以下にとれば，漸近的に生成される点列がいわゆる中心曲線に接して最適解に収束することを表している．特に，λ を 1/2 に取ったときに，中心曲線へ近づく作用が一番強力であることが示せる．この事実を利用すると，以下のようにして，ステップ幅を制御することでアフィンスケーリング法に超一次収束性を持たせることができる．アフィンスケーリング法では，最適解の近くで中心曲線のごく近くにいるとすると，目的関数値が "2 次収束的に減少" するような長いステップをとることができる．しかし，実際そのようなステップを取ると中心曲線からは離れてしまい，次の反復では長いステップがとれなくなる．ところが，$\lambda=1/2$ にとることで，中心曲線の近くにび戻ってくることができ，再び長いステップがとれるようになる．このような考えに基づいて，$\lambda=1/2$ と$\lambda\sim 1$ とを交互にとるように注意深くステップを制御すると，超一次収束するアフィンスケーリング法が構成できるのである [3, 4].

上の諸結果を得る上で重要なのは，同次形問題 (多面錐を制約とする問題) に対するアフィンスケーリング法 (同次形アフィンスケーリング法) の解析である．アフィンスケーリング法の解析で問題になるのは制約領域の境界近くでの振る舞いである．制約領域は多面体なので，その境界は局所的には多面錐とみなすことができる．したがって，境界付近でのアフィンスケーリング法の振る舞いは，同次形アフィンスケーリング法の振る舞いで近似できる．同次形アフィンスケーリング法は，Karmarkar 法や多面体の解析的中心を求める Newton 法 と非常に深い関係があり，これらの関係を利用して，アフィンスケーリング法自身の解析ができる [3]．実際，$\lambda=0.9107$ 以上のすべてのステップ幅について，アフィンスケーリング法が最適解に収束せず，誤った頂点に収束する例などもそのようにして構成されている．また，双対推定が収束しない場合，カオス的な振舞いをすることがあることなども観察されている．

一つのアルゴリズムがこのようにいろいろな観点から解析できるというのは大変に面白いことだと思う．これからもこのアルゴリズムが古典としての輝きを失わず，さまざまな形で人々の興味の対象であり続けることを願っている．

参考文献

[1] I. Dikin: Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.8 (1967), pp. 674-675.

[2] 土谷隆：アフィンスケーリング法の理論的解析．統計数理, Vol. 42 (1994), pp. 277-296.

[3] Takashi Tsuchiya : Affine scaling algorithm. In *Interior Point Methods of Mathematical Programming* (T. Terlaky ed.), pp. 35-82, Kluwer Academic Publisher, Netherland, 1996.

[4] T. Tsuchiya and R. D. C. Monteiro : Superlinear convergence of the affine scaling algorithm. *Mathematical Programming*, Vol. 75 (1996), pp.77-110.