1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

移動距離の上限を考慮した都市の最適なプロポーション

02202500　慶應義塾大学　*佐々木　源　SASAKI Hajime
01107680　慶應義塾大学　栗田　治　KURITA Osamu

1．はじめに

都市のプロポーションを論じた興味深い研究[1]は，都市を体積一定の直方体で与えている．（ただし底面は一辺Lの正方形で，高さはh）．そして，垂直移動と地上での移動を合わせた所用時間の平均値を最小にすべき直方体のプロポーションを明示的に求めている．そこでの知見は今後の都市設計のために重要なものと考えられる．ただし[1]は，あらゆる起・終点ペアの移動を等しい頻度で与えている．現実の我々の移動を考えた場合，移動の頻度が距離の増大に伴って減衰すると見なすべき局面も多い．このことを考えるために，本研究では移動距離には上限Rがあるものとし，Rより大きな移動は起き得ないと想定する．ただし，この場合[1]のように平均時間を最小化しようとすると，距離Rよりも大きな起・終点ペアを増やせばよい（すなわち出来るだけ不便なプロポーションの直方体を設ければよい）という自明な解を追求することになり無意味である．そこで，本研究では移動距離の上限Rの下で総トリップ数を最大化するような都市のプロポーションを求めることにした．トリップ数が多ければ，様々な経済的波及効果が見込まれる．つまり，

**限られた体積で最も活気のある都市を
実現するための設計指針**

を得ることが本研究の目的である．

Rの大小について付言しておこう．Rが小さいことは長距離の移動がないことを意味する（例えば老人や幼児の移動）．一方，Rが大きいことは長距離の移動が可能であることを意味する（例えば通勤移動）．都市生活者の身体的特性やトリップ目的によって，都市の活性を高めるための設計方針は異なったものになる．本研究はこの点に着目しているのである．

2．都市の定義

本論文では都市を底面が1辺Lの正方形で，高さがhの直方体で与える．この直方体は，同じ高さのビルが密に建っているものと見なしてもよい．都市内では人口が一様に分布すると想定し，移動を次のように定義する．

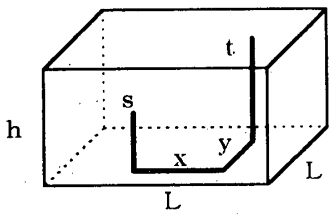

図１：直方体都市内での移動

ビルのある階（高さs）から地上に降り，地上を直方体の各辺に平行なRecti-Linear距離で$x+y$だけ移動し，目的のビルのある階（高さt）へ昇る．また，前節でも示した通り移動距離の上限はRとする．

3．総トリップ数

都市内でどのぐらいの量の移動が行われるかを示す総トリップ数Vを考える．起点のビルと終点のビルとが互いに独立に，密度１で分布するならば，図１のxならびにyは，共通の三角分布に従うことになる．x, yの密度は次の通り：

$$f_1(x)=2(L-x) \qquad (0\le x\le L)\ ;$$
$$f_2(y)=2(L-y) \qquad (0\le y\le L).$$

また，sならびにtは$[0,h]$で密度１を持つものとする：

$$g_1(s)=1 \qquad (0\le s\le h)\ ;$$
$$g_2(t)=1 \qquad (0\le t\le h).$$

このとき，$x+y+s+t\le R$を満たす領域をAとすると移動距離がR以下のトリップの総数は

$$V=\int_A f_1(x)f_2(y)g_1(s)g_2(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

と定式化される．VはL,h,Rからなる関数であるが，都市の容積を一定に保って議論を進めるため

$$L^2h=c \quad (一定)$$

とすると，VはL,Rならびにcの関数$V=V(c,L;R)$となる．

ここでRを固定してVを最大化するLを求めると，LはRの関数と考えられる．これを$L=L^*(R)$とおく．つまり

“ **都市の体積がcのとき，移動距離の上限がRであるとすると，総トリップ数Vを最大化するLは$L=L^*(R)$である．また，このとき，都市の高さは$h^*(R)=c/L^*(R)^2$で与えられる．**”

ここで$L^*(R)$を具体的に求めると，Rの値によって場合分けして次のように示される：

$0\le R<2\sqrt[3]{2c}$ のとき単調減少関数；
$2\sqrt[3]{2c}\le R<3\sqrt[3]{2c}$ のとき $L^*(R)=\sqrt[3]{2c}$ ；
$3\sqrt[3]{2c}\le R$ のとき $L\in\left[L_{\min}(R),L_{\max}(R)\right]$ において不定，
ここで，$L_{\min}(R),L_{\max}(R)$ は $2L+\dfrac{2c}{L^2}=R$ の $0<L$ を満たす解（ただし $L_{\min}(R)\le L_{\max}(R)$）．

ただし，$0 \le R < 2\sqrt[3]{2c}$ の場合の $L^*(R)$ を求めるためには，L に関する６次方程式を解く必要があり，（現在のところ）その一般解を求めるには至っていない．今回，この場合は数値解を求めることにより対応した．

関数 $L^*(R)$ の概形を図２に表す($c=1$ のとき)．

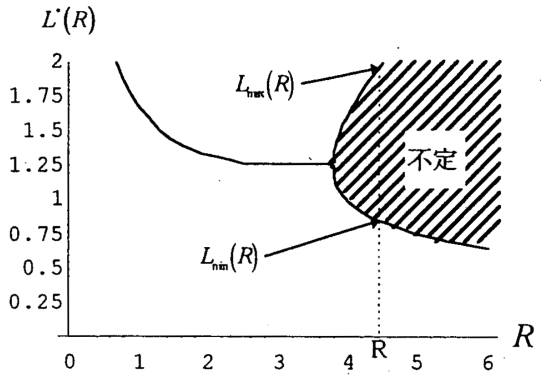

図２：V を最大化する $L^*(R)$ のグラフ（$c=1$）．

４．総移動距離

図２において $3\sqrt[3]{2c} < R$ ではトリップ数が $L \in [L_{min}(R), L_{max}(R)]$ で一定という不定解が得られた．しかし L の値によって総移動距離（すなわち移動エネルギーの総和）は異なった値をとる．エネルギー削減の観点からすれば，これを最小化すべき解に意味があるだろう．そのため，移動距離の総和 W を次のように定式化する：

$$W = \int_A (x+y+s+t) f_1(x) f_2(y) g_1(s) g_2(t) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

W を最小化する $L = L^*(R)$ は次式の通り：

$3\sqrt[3]{2c} \le R < 8\sqrt[3]{c/9}$ のとき $2L^*(R) + \dfrac{2}{L^*(R)^2} = R$ を満たす $L^*(R)$，ただし $\sqrt[3]{2c} \le L^*(R) < \sqrt[3]{3c}$；

$8\sqrt[3]{c/9} \le R$ のとき $L^*(R) = \sqrt[3]{3c}$．

図２の不定部分（斜線部）に上式を書き入れると図３のようになる（$c=1$ のとき）．

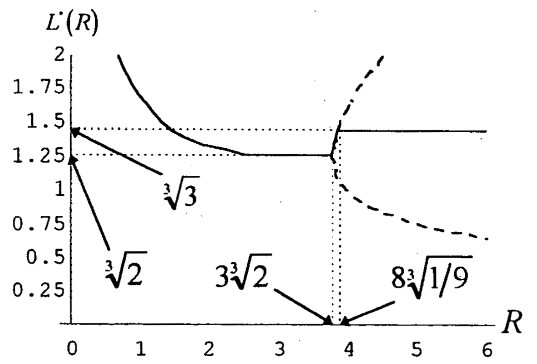

図３：$L^*(R)$ のグラフ（$c=1$）．

５．数値例

具体例を挙げてみよう．都市の容積が $c = 1\mathrm{km}^3$ で，移動距離の上限が $R = 0.8\mathrm{km}$（徒歩にして約 10 分）の場合

$$L^*(0.8) = 1.88\mathrm{km},\quad h^*(0.8) = 0.28\mathrm{km}$$

となる．

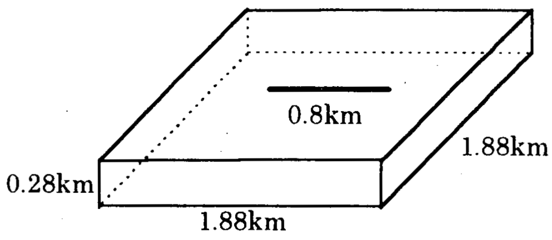

図４：$R = 0.8\mathrm{km}$ のときの都市例．

６．応用

前節までに挙げたグラフはすべて都市の容積が $c=1$ の場合のグラフであった．容積が $c = c'$ の場合，移動距離の上限が R であれば仮想の上限を $R' = R/\sqrt[3]{c'}$ として $L^*(R')$ を求め，$\sqrt[3]{c'}L^*(R')$ を最適な都市の底辺とすればよい．

また，これまでの議論は垂直・水平移動距離を同様に扱ってきた．しかし，垂直移動をエレベーターなどで行えば移動時間には水平移動との相違が現れる．このときは垂直移動距離に関して重み付けを行えばよい．水平・垂直を含めた移動距離 r を

$$r \le x + y + \alpha(s+t)$$

とすると仮想の容積を $c' = c/\alpha$ として $L^*(R)$，$h^*(R)$ を求め，都市の底辺はそのままで $L^*(R)$，高さは α 倍して $\alpha h^*(R)$ に設定すればよい．

また，本論文では距離が R 以上の移動は起こらないとしたが，移動距離に応じてトリップ密度が変化するという仕組みを用いることもできるだろう．筆者らは指数型の重力モデルの下で，その計算を行った．これについても当日発表する予定である．

参考文献

[1]腰塚武志(1995)：コンパクトな都市のプロポーション，都市計画論文集，pp.499-504.