1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

目的地がランダムに分布するときの周回距離の理論

02202460　慶應義塾大学　*塩野　直志　SHIONO Naoshi
01107680　慶應義塾大学　栗田　治　KURITA Osamu

1．はじめに

いま，平面上（あるいは直線上）にランダムに分布する点を「施設」とみなし，任意に出発点を定め幾つかの施設を周回することを考える．ただし，周回する順序に関しては様々なルート選択のシナリオが考えられる．

そこで，どのルートがどのくらいの(非)効率性を持つのかを調べることが本論文の主旨である．計画性のある行動にはどの程度の効率があるのかを明らかにすることにより，日常生活での「移動」を考える際の重要な指針とすることができる．

ただし本論文では特に解析的に求まったものを掲載した．

2．空間ポアソン分布と距離分布

いま，十分に広い領域に点がランダムに分布しているとする．対象を一次元（直線）とし点の密度が大局的にμであるとした際，任意に与えた長さLの線分にy個の点がある確率を$P(y,L)$とおくと

$$P(y,L)=\frac{(\mu L)^y}{y!}e^{-\mu L}\quad(y=0,1,2,\cdots).\tag{1}$$

となる．ここで直線上に任意に点Qを与え，Qからk番目に近い点への距離をT_kと定義する．このときT_kの確率密度関数を$g_k(t_k)$,期待値を$\langle T_k\rangle$,二乗期待値を$\langle T_k{}^2\rangle$とおくと

$$g_k(t_k)=\frac{(2\mu)^k}{(k-1)!}t_k{}^{k-1}e^{-2\mu t_k}\,(0<t_k<\infty),\tag{2}$$

$$<T_k>=\frac{k}{2\mu},\qquad <T_k^2>=\frac{k(k+1)}{(2\mu)^2}\tag{3}$$

となる[1]．

次に対象を二次元（平面）とし点の密度が大局的にρであるとした際，任意に与えた面積Sの領域にx個の点がある確率を$P(x,S)$とおくと

$$P(x,S)=\frac{(\rho S)^x}{x!}e^{-\rho S}\quad(x=0,1,2,\cdots)\tag{4}$$

となる．即ち(1)・(4)共にポアソン分布である．同様に任意に与えた点Qからk番目に近い点への距離をR_kと定義し，R_kの確率密度関数を$f_k(r_k)$,期待値を$\langle R_k\rangle$,二乗期待値を$\langle R_k{}^2\rangle$とおくと

$$f_k(r_k)=\frac{2(\rho\pi)^k}{(k-1)!}r_k{}^{2k-1}e^{-\rho\pi r_k{}^2}\,(0<r_k<\infty),\tag{5}$$

$$<R_k>=\frac{(2k-1)!!}{2^k(k-1)!\sqrt{\rho}},\qquad <R_k{}^2>=\frac{k}{\rho\pi}\tag{6}$$

となる[1]．以上の考えを用いて周回距離の期待値及び分散が算出される．

3．直線上の周回

いま，直線上にあるn個の施設を周回することにする．その際に考えられるルートとして本論文では以下の3通りを考える．（図1）

ルートの説明

[ルート1]一方方向にn箇所を訪れ元の点Qに戻る

[ルート2]Qから最も近い場所⇒そこからまだ訪れていない最も近い場所⇒そこからまだ訪れていない最も近い場所…とn箇所進み元の点Qに戻る

[ルート3]合計の距離が最短距離になるようにn箇所選んで移動し元の点Qに戻る

そのとき，それぞれのルートに関する移動距離の期待値は表1の様に表される．まず，ルート1と3を比較すると，例えばμ=1km^{-1}（1kmあたり施設がだいたい一つ）として10箇所訪問する場合では5km以上もの距離差がつくことになり，予め計画性を持って行動することが如何に重要かを如実に表す結果となる．

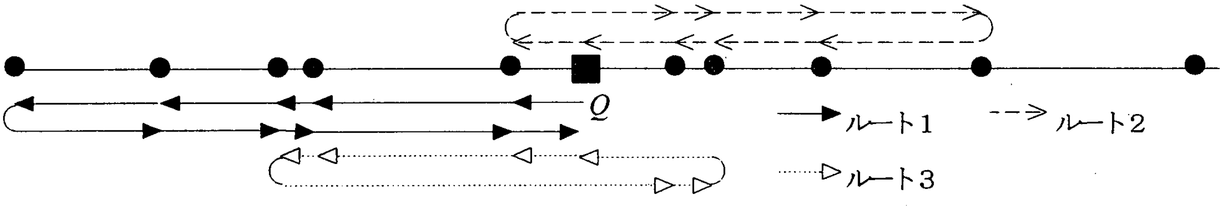

図1　直線上での各ルートによる周回の比較
（一例として5箇所訪問することとし，それぞれのルートが異なる場合を採り上げた）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表1　ルートごとの訪問数に応じた周回距離の期待値

訪問数	ルート1	ルート2	ルート3
1	2	1	1
2	4	2.375	2.25
3	6	3.984	3.65
4	8	5.743	5.078
…	…	…	…
8	16	13.430	11.322
10	20	17.417	14.600

(ともに $/\mu$)

また，ルート2は1・3と比較すると少ない施設を周回するときは効率がよい方法だが，訪問数が多くなるほど効率が悪くなることが読み取られる．これは，移動する施設が多くなるにつれ一方向に向かうことが多くなることによる．

4．平面上の周回

平面上のルートとして本論文では以下のルートを採り上げる．また，図2に移動形態の一例を示す．

ルート

出発地 (Q) $\Rightarrow Q$ から最も近い場所 (P_1) $\Rightarrow Q$ から二番目に近い場所 (P_2) $\Rightarrow \cdot\cdot\cdot \Rightarrow$ Q から n 番目に近い場所 (P_n) $\Rightarrow Q$

いま，このルートで n 箇所を周回したときの距離を A_n と定義すると

$$A_n = R_1 + R_n + \sum_{k=1}^{n-1} X_{k,k+1} \tag{7}$$

(ただし，$X_{k,k+1} = \overline{P_k P_{k+1}}$，$R_k = \overline{QP_k}$ とおいた)

となる[2]．

既に，2箇所を周回する場合の期待値$< A_2 >$は文献[2]で詳しく述べられているが，本研究ではn 箇所を周回する場合の期待値および分散を算出した．その結果は表2に示してある．

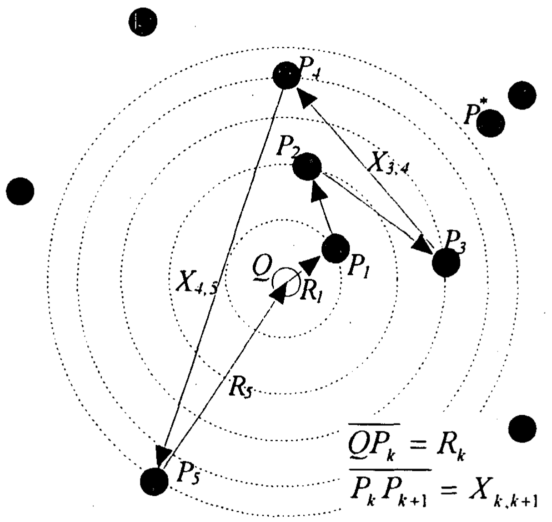

図2　平面上での周回ルート

表2　平面上のルートでの訪問数に応じた周回距離の期待値および分散

訪問数	期待値 ($/\sqrt{\rho}$)	分散 ($/\rho$)
1	1	0.2732
2	2.0988	0.7782
3	3.3898	1.5787
4	4.8587	2.6754
…	…	…
8	12.232	10.007
10	16.68	15.434

なお導出過程は省略するが，期待値$< A_n >$は図2及び(6)より

$$< A_n > = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{\frac{1}{2} + \frac{(2n-1)!!}{2^n (n-1)!}\right\} + \sum_{k=1}^{n-1} < X_{k,k+1} >$$

ここで，$< X_{k,k+1} > = \dfrac{\Phi(k)(2k+1)!!}{2^{k+1}(k-1)!\sqrt{\rho}}$，

$$\Phi(c) = \frac{(c-1)!}{(-1)^{1-c}}\left[\frac{\{(c+1)!\}^3 2^{4c+4}}{\{(2c+2)!\}^2 \pi} - \left\{\sum_{i=1}^{c-1} \frac{(-1)^{i-1}\Phi(i)}{(i-1)!(c-i)!}\right\}\right]$$

(ただし，$c \geq 2$ で$\Phi(1) = 32/(9\pi)$ である)

より算出される．

表2からまず訪問数に関わらず

$$< A_n > \propto 1/\sqrt{\rho} \tag{8}$$

であることがいえる．即ち$< A_n >$を半減させたいときは施設は4倍に増やす必要がある．

また，このルートの欠点として不合理な移動—例えば図2でのP_4からP_5のへの移動—が生じてしまうことが挙げられる．実際の移動ではP_5よりP^*を選ぶ方が効率がいいと考え行動するであろう．この非効率性は，例えば訪問数を増やした際の期待値及び分散の増加にそのままつながっている．

5．おわりに

今回採り上げたルートの他にも様々なルート—例えば直線上のルート2，3の考えを平面上に適用すること—が考えられる．これは解析的に解くことが難しいので概略を発表の際に述べることにする．また，現実社会への適用も今後の課題である．

参考文献

[1] 栗田　治(1995):空間ポアソン分布と距離分布，慶應義塾大学理工学部管理工学科 Technical Report，No.95009.

[2] 栗田　治(1995):空間ポアソン分布の下での周回距離の期待値．日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集，pp.88-89.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．