1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

フラクタル時系列の性質を用いた需要予測の一手法

(株) 住建産業　　植村 芳雄　UEMURA Yoshio
九州大学経済学部　　* 時永祥三　TOKINAGA Shozo

1 まえがき

本報告では, フラクタル時系列の持つ自己相似的な性質を用いて需要予測を行なう方法について提案し [1],[2] , 具体的に商品の需要予測の可能性について検討する。

2 フラクタル時系列の予測手法

一般的な線形時変入出力システム

$$y(t)=\int_0^{t_0} h(t,t-\tau)x(\tau)d\tau, t>t_0. \tag{1}$$

を考察する。線形時変システムのインパルス応答関数 $h(t,\tau)$ がスケール関数 $\phi(t)$ を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(t,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_{ij}\phi_{Ni}(t)\phi_{Nj}(\tau). \tag{2}$$

ただし,

$$\phi_{ij}(t)=\phi(2^i t-j). \tag{3}$$

$$\phi(t)=\begin{cases}1, 0<t\le 1;\\ 0, \quad\quad\quad \text{otherwise}\end{cases}. \tag{4}$$

特に, 以下では入出力が同じ時系列である同定問題 ($y(t)=x(t)$ の場合) を考える [1],[2]。

いま, 式 (1) による予測値 $\bar{x}(t)$ と入力時系列 $x(t)$ との差の最小 2 乗近似を考え, これを最小化するようにインパルス応答関数の係数 h_{ij} を決定する。

次に, 時間軸の伸長による予測を考察する。いま, $T_s\le t\le T_e$ は時系列 $x(t)$ が観測される時間区間であり $T_1=T_e-T_s$ とする。また, $0<t\le T_2$ は $x(t)$ を予測する区間とする。次の量を定義する。

$$b=a^D, a=T_2/T_1, T_2>T_1. \tag{5}$$

D は時系列 $x(t)$ のフラクタル次元であり, $1<D<2$ である。$x(t)$ がフラクタル性を持つ場合には, その自己相似性により, $0<t\le T_2$ において, 次の式が近似的に成立する。

$$x(t)=\int_0^{bt_0} h(\frac{t}{b},\frac{t-\tau}{b})x(\tau)d\tau, t>bt_0 \tag{6}$$

インパルス応答関数 $h(t,\tau)$ はスケース伸長されても時系列の自己相似性から, 同じ線形予測の関係式を成立させる性質を保持するので, 区間 T_1 で推定された $h(t,\tau)$ を b 倍したものを用いれば, a 倍に伸長した時間域においても, 式 (6) の予測モデルが成立する。

サンプリング間隔を 1 とする, すなわち, 式 (1) では $t=t_0+1$ であり, 式 (6) では $t=bt_0+b$ となるので, 次の予測式となる。

$$x(bt_0+b)=\int_0^{bt_0} h(\frac{t}{b},\frac{t-\tau}{b})x(\tau)d\tau, t>bt_0 \tag{7}$$

予測を議論する場合には, 通常, 現在までの観測データをもとにして, 1 ステップ先のサンプルの予測値を計算することが行われる。これを, 以下では b 時刻先の予測とよぶ。これに対して, 式 (7) に従って, 逐次的に予測された値を観測値と見なして, 予測を継続していく場合を考え, これにより n ステップ将来の値を予測する場合を nb 時刻先の予測とよんでおく (予測誤差を最大振幅との比とする)。

表 1. 本手法の nb 時刻先の予測誤差

$nb=40$	$nb=80$	$nb=120$	$nb=140$
4.1	4.7	5.3	6.1

3 フラクタル時系列のウェーブレット変換

与えられた時系列$x(t)$をウェーブレット変換する。

$$x(t)=\sum_{n}\sum_{m}x_n^m\psi_n^m(t). \tag{8}$$

$$x_n^m=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\psi_n^m(t)dt. \tag{9}$$

ここで,$\psi_n^m(t)$ は基本関数$\psi(t)$ に対する次のスケール, シフト変換とにより構成される。

$$\psi_n^m=2^{m/2}\psi(2^m t-n). \tag{10}$$

$x(t)$がフラクタル性をもつことから, ウェーブレット係数x_n^mの満たすべき条件として, 次の関係式が得られる。

$$varx_n^m=\sigma^2 2^{-\gamma m}. \tag{11}$$

式の両変の対数をとると,m についての線形の直線となるので, 左辺により計算されるデータに対して回帰直線を当てはめ, この直線との2乗平方誤差 $rmse$ の大きさによりフラクタル性を判定できる。

$$rmse=[\sum_{m}(log(varx_n^m)-c_0-c_1 m)^2]^{1/2}/M \tag{12}$$

Mは添字 m が取り得る総数である。

4 応用例

実際の商品の需要を示す時系列に対して, 本手法を適用した場合の結果を整理する。以下に処理手順を示す。

まず, トレンドを除去する。数年にわたる需要時系列は緩やかなトレンドを含むのでこれを除去した時系列を求める。次に, 得られた時系列に対してフラクタル性があるかどうかをウェーブレット変換係数の対数値に対する回帰直線との誤差を用いて検証する。これらに準備のあと, フラクタル性を持つ時系列に対して予測手法を適用してその誤差を検討する。結果について以下にまとめている。

(1) 記録周期による違い

表 1 には, 需要データの記録周期の違いによる $rmse$ の状況を示している。これらの結果より分かるように, 記録の周期が短い周期 1 の場合には時系列そのものがスパイク状であり, フラクタルであるとは言えない。これに対して記録期間の長いケースではフラクタル性の顕著な時系列となる。この場合, 全体的に $rmse$ は 0.2 程度となっている。この広がりについては, 商品による差が見られる。

記録周期によりフラクタル性に差が見られるのは, 商品の発注がまとまってなされること, 従って, これが時間を隔てて相関 (長期的な相関) を発生している可能性がある。

表 2.$rmse$ の記録周期による変化

周期 1	周期 2	周期 3	周期 4
0.318	0.185	0.102	0.078

(2) 予測誤差

表 2 には予測誤差についてまとめている。フラクタル性が見られるのは周期 1, 2, 3 のデータであるので, これらについて平均予測誤差を示す (誤差の定義は fBm の場合と同様)。また, フラクタル次元についても約 1.5 の近辺である。

表 2. 記録周期と nb 時刻先の予測誤差

記録周期	$nb=30$	$nb=60$	$nb=120$
周期 2	5.8	6.7	8.9
周期 3	5.8	7.6	8.8
周期 4	4.5	7.7	9.1

文 献.

[1] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之:"時系列のフラクタル性質を用いた予測手法とその応用", 信学論 (A), J79-A,11,pp.1793-1800(1996-11).

[2] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之:"スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いたフラクタル時系列予測", 信学論 (A), J79-A,12,pp.1-9(1996-12).

[3] Wornell,G.W.and Oppenheim,A.V. :"Estimation of fractal signals from noisy measurement using Wavelets", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.40, No.3, pp.611-623 (March 1992)