1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

L_1－ノルムによる実験計画法に関する研究
－PART Ⅰ　理論的考察－

01205520　東京理科大学　末吉　俊幸　SUEYOSHI Toshiyuki
02004150　東京理科大学　*奥山　茂　OKUYAMA Shigeru
02202300　東京理科大学　鈴木　貴朗　SUZUKI Takaaki

1. 序論

本論文は，数理計画法 (特に，目標計画法と輸送問題) のフレームワークで 2 次元配置といった実験計画問題をモデル化し，その解法の手順を示し，従来の統計学では得られなかった分析方法とそれに伴う方法論を確立することを目的としている．

また，本研究に関連する文献として [1], [2], [3], [4], [5], [6] があるので参照されたい．

2. 2 次元配置問題

2 次元配置問題は 2 つの要因があり，次の構造モデルを持つことから定式化される．

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, a, \\ j = 1, \cdots, b, \\ k = 1, \cdots, n. \end{array} \tag{1}$$

(1) 式において，2 つの要因の効果と測定されたデータの関係は，次のように定義付けがなされる．

α_i ： A の要因の i 番目のレベル
β_j ： B の要因の j 番目のレベル
μ ： 定数 (平均値)
ε_{ijk} ： 2 要因が (i , j) の時の k 番目の誤差
y_{ijk} ： 2 要因が (i , j) の時の k 番目の測定値

3. 最小絶対値推定法によるモデル化

(1) 式に最小絶対値推定法を当てはめると

$$\text{最小化} \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left|\varepsilon_{ijk}\right| = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left|y_{ijk} - (\mu + \alpha_i + \beta_j)\right|. \tag{2}$$

の形で定式化できる．ここで (2) 式は次のような目標計画法でモデル化できる．

$$\text{最小化} \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(d_{ijk}^{+} + d_{ijk}^{-}),$$

$$\text{制　約} \quad \mu + \alpha_i + \beta_j + d_{ijk}^{+} - d_{ijk}^{-} = y_{ijk}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, a, \\ j = 1, \cdots, b, \\ k = 1, \cdots, n, \end{array} \tag{3}$$

$$d_{ijk}^{+} \geq 0, \; d_{ijk}^{-} \geq 0.$$

この (3) 式では μ, α_i, β_j は制約されておらず，正，負，零のすべての値をとり得るため,線形計画法のアルゴリズムで解く場合には，それらの要因を正と負の部分 ($\mu = \mu^{+} - \mu^{-}, \alpha_i = \alpha_i^{+} - \alpha_i^{-}, \beta_i = \beta_j^{+} - \beta_j^{-}$) に分ける必要がある．

また，統計的 2 次元配置問題では，自由度を増やすために $\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$ を制約として付け加えることができる．

4. 双対問題の輸送問題化

(3) 式を直接，線形計画法のアルゴリズムで解く場合には，データによっては計算時間が極めて大き

くなることがある．そこで，計算がより容易な形に変形することによって，その計算時間を短縮する方法が必要となる．本論文ではその代表的なアプローチとして (3) 式を輸送問題として定式化し直す．

まず (3) 式に $\lambda_i = \mu + \alpha_i (i = 1, \cdots, a)$，を代入し，その双対モデルをとると次の式になる．

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} w_{ijk}, \\
&\text{制　約} \quad \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} w_{ijk} = 0, \quad i = 1, \cdots, a, \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} w_{ijk} = 0, \quad j = 1, \cdots, b, \qquad (4) \\
&\qquad\qquad -1 \le w_{ijk} \le 1, \quad i = 1, \cdots, a,\ j = 1, \cdots, b,\ k = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

(4) 式の特徴は $\lambda_i = \mu + \alpha_i (i = 1, \cdots, a)$ とおくことによって，普通の双対問題に比べ自由度を 1 個増やして検定の精度を高め，逆に制約式は 1 個減らして計算時間を短縮しているところにある．

次に，(4) 式において $w'_{ijk} = w_{ijk} + 1$ と置き換えることによって，以下のような制約付きの輸送問題として再定式化できる．

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} w'_{ijk}, \\
&\text{制　約} \quad \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} w'_{ijk} = bn, \quad i = 1, \cdots, a, \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} w'_{ijk} = an, \quad j = 1, \cdots, b, \qquad (5) \\
&\qquad\qquad 0 \le w'_{ijk} \le 2, \quad i = 1, \cdots, a,\ j = 1, \cdots, b,\ k = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

5. まとめ

最小絶対値推定法による回帰分析がデータの中に存在する異常値や正規分布以外の誤差分布に対して強い頑健性を維持している事は広く知られている．本論文ではこの分析基準を回帰分析から離れ，実験計画法（特に，2 次元配置問題）に応用することを試みた．

従来，実験計画法の手法として用いてきた分散分析法では，データが正規分布から外れて異常値が存在すると精度の低い結果をもとに誤った見解を示す恐れがある．これに対し最小絶対値推定法は，異常値に対して強い頑健性を維持しているので，より精度の高い見解を示すことが可能となる．

［参考文献］

[1] T. Sueyoshi, "Stochastic Frontier Production Analysis : Measuring Performance of Telecommunications in 24 OECD Countries," *European Journal of Operational Research*, Vol.74, No.5, pp.466-478 (1994).

[2] T. Sueyoshi, "Constrained Regression Median for Possible Salary Discrimination," *European Journal of Operational Research*, Vol.77, No.2, pp.253-271 (1994).

[3] T. Sueyoshi, "Empirical Regression Quantile and Leverage Treatment Method," *The Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.38, No.1, pp.34-54 (1995).

[4] T. Sueyoshi, "Divestiture of Nippon Telegraph & Telephone," *Management Science*, Vol.42, No.9, 1326-1351 (1996).

[5] T. Sueyoshi, "Least Absolute Value Estimation and Its Statistical Applications (in Japanese)," *The Journal of the Operations Research Society of Japan* (1997) (Accepted and Printing).

[6] T. Sueyoshi and K. Sekitani, "Goal Programming Regression with Serial Correlation : Policy for Japanese Information Infrastructure Development," *OMEGA : International Journal of Management Science* (1997) (Accepted and Printing)