1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

DEA最適ウェイト解のユニーク性の検証
～線形計画法の強相補性定理を用いて～

01205520 東京理科大学 末吉 俊幸 SUEYOSHI Toshiyuki
02004130 東京理科大学 *木名瀬 洋一 KINASE Youichi
02102700 東京理科大学 大西 健児 OHNISHI Kenji

1. はじめに

従来のDEA(Data Envelopment Analysis)の研究において，一般的に分析対象のDMU_o(Decision Making Unit)がDEA効率的と判定される場合には，その最適ウェイト解(v_{io}^*, u_{ro}^*)がユニークに定まらないという問題点が指摘されている．本研究では，上記の問題点の検証を線形計画法の強相補性定理を用いておこなう．

2. DEAモデルによる強相補性定理の記述

ここでは線形計画問題で表わされるDEAモデルにおいて，線形計画法の強相補性定理がどのように成り立つのか式変形を加えながら導く．

一般的にDEAのCCRモデルは次のような線形計画問題で記述される．

〈P-1〉 Max $\mathbf{u}^T\mathbf{y}_o$

s.t.
$$\mathbf{v}^T\mathbf{x}_o = 1 \quad (1)$$
$$-\mathbf{v}^T X + \mathbf{u}^T Y \leq \mathbf{0} \quad (2)$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},\quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

また，〈P-1〉は次のような双対モデルをもつ．

〈D-1〉 Min θ

s.t.
$$\theta\mathbf{x}_o - X\lambda \geq \mathbf{0} \quad (3)$$
$$\mathbf{y}_o - Y\lambda \leq \mathbf{0} \quad (4)$$
$$\lambda \geq \mathbf{0}.$$

ここでは，〈P-1〉を主問題，〈D-1〉を双対問題とする．

最初に(1)式にθをかける．

$$\mathbf{v}^T\mathbf{x}_o\theta = \theta$$
$$\Leftrightarrow\ (\mathbf{v}^T\mathbf{x}_o - 1)\theta = 0$$

次に，(2)式の両辺にλをかける．

$$-\mathbf{v}^T X\lambda + \mathbf{u}^T Y\lambda \leq 0 \quad (5)$$

また，(3)式の両辺に$\mathbf{v}^T$をかける．

$$\mathbf{v}^T\theta\mathbf{x}_o - \mathbf{v}^T X\lambda \geq 0 \quad (6)$$

さらに，(4)式の両辺に$\mathbf{u}^T$をかける．

$$\mathbf{u}^T\mathbf{y}_o - \mathbf{u}^T Y\lambda \leq 0 \quad (7)$$

(5)式，(6)式の共通項$\mathbf{v}^T X\lambda$に注目し，

$$\mathbf{u}^T Y\lambda \leq \mathbf{v}^T X\lambda \leq \mathbf{v}^T\theta\mathbf{x}_o (= \theta) \quad (8)$$

が導き出される．$\mathbf{v}^T\theta\mathbf{x}_o$は〈P-1〉の制約条件(1)式より$\theta$と等しい．また(7)式，(8)式の共通項$\mathbf{u}^T Y\lambda$に注目し，

$$\mathbf{u}^T\mathbf{y}_o \leq \mathbf{u}^T Y\lambda \leq \mathbf{v}^T X\lambda \leq \mathbf{v}^T\theta\mathbf{x}_o (= \theta) \quad (9)$$

が導き出される．

ところで，$(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$および$(\theta^*, \lambda^*)$が最適解であるとき双対定理が成り立つので，主問題と双対問題のそれぞれの目的関数値$\mathbf{u}^{*T}\mathbf{y}_o$と$\theta^*$は等しい．したがって(9)式は，

$$\mathbf{u}^{*T}\mathbf{y}_o = \mathbf{u}^{*T} Y\lambda^* = \mathbf{v}^{*T} X\lambda^* = \mathbf{v}^{*T}\theta^*\mathbf{x}_o (= \theta^*) \quad (10)$$

のようにすべての項が等号で結ばれることになる．そこで，(10)式の各等号に注目すると次の3式を導き出すことができる．

$$\lambda^*(\mathbf{v}^{*T} X - \mathbf{u}^{*T} Y) = 0 \quad (11)$$
$$\mathbf{v}^{*T}(\theta^*\mathbf{x}_o - X\lambda^*) = 0 \quad (12)$$
$$\mathbf{u}^{*T}(Y\lambda^* - \mathbf{y}_o) = 0 \quad (13)$$

ここで，主問題〈P-1〉およびその双対問題〈D-1〉の制約式にスラック変数μ，$\mathbf{s}^+$，$\mathbf{s}^-$を加えて変形すると次のようになる．

〈P-2〉 Max $\mathbf{u}^T\mathbf{y}_o$

s.t.
$$\mathbf{v}^T\mathbf{x}_o = 1$$
$$-\mathbf{v}^T X + \mathbf{u}^T Y + \mu = \mathbf{0} \quad (14)$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},\quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

〈D-2〉 Min θ

s.t. $$\theta \mathbf{x}_o - X\lambda - \mathbf{s}^- = \mathbf{0} \qquad (15)$$

$$\mathbf{y}_o - Y\lambda + \mathbf{s}^+ = \mathbf{0} \qquad (16)$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}.$$

ところで，(11)～(13)式は(14)～(16)式のスラック変数を用いると，次のように書き換えることができる．

$$\lambda^* \cdot \mu = 0 \qquad (17)$$

$$\mathbf{v}^{*T} \cdot \mathbf{s}^- = 0 \qquad (18)$$

$$\mathbf{u}^{*T} \cdot \mathbf{s}^+ = 0 \qquad (19)$$

(17)式～(19)式は線形計画法の相補性定理がDEAモデルにおいて表わされた形である．

さらに，これよりも強い定理として強相補性定理がある．これは主問題，双対問題の最適解のなかには，相補性条件(17)式～(19)式のそれぞれにおいて，一方がゼロならば他方は必ず正になるものが存在するというものである．これは次のように示される．

$$\lambda^* + \mu > \mathbf{0} \qquad (20)$$

$$\mathbf{v}^* + \mathbf{s}^- > \mathbf{0} \qquad (21)$$

$$\mathbf{u}^* + \mathbf{s}^+ > \mathbf{0} \qquad (22)$$

この強相補性定理がDEAモデルにおいて成り立つことの意味を考える．CCRモデル〈P-1〉によって最適ウェイト解$(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$が得られるとする．その最適ウェイト解の中で$v_i = 0\ (i = 1,\ldots,m)$または$u_r = 0\ (r = 1,\ldots,s)$である場合，それら$v_i$，$u_r$に対応するスラック変数$s_i^-$，$s_r^+$は強相補性定理により正になる必要がでてくる．しかしながら，DEA効率的と判定された$\mathrm{DMU_0}$には，$s_i^- = 0$，$s_r^+ = 0$が起こることがあり，強相補性定理が成り立たないことになる．つまり，その場合の最適ウェイト解$(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$はユニークに定まっているかどうかが保証されないことになるのである．

3．DEA最適ウェイト解の上限値と下限値の計算モデルの提案

前節では，DEA効率的と判定されるDMU_oの最適ウェイト解はユニークに定まっているとは限らないことが明らかになった．そこで，計算機が算出する最適ウェイト解以外にどのような値を取りうるのかを調べるために，ウェイトの上限値と下限値を計算するモデルを提案する．

次のモデルは入力ウェイト$v_{io}\ (i = 1,\ldots,m)$の上限値を計算するモデルである．

〈U-1〉

Max v_{io}

s.t. $$-\mathbf{v}^T X + \mathbf{u}^T Y \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x}_o = 1$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y}_o = 1$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

また，下限値を計算するモデルを次に示す．

〈L-1〉

Min v_{io}

s.t. $$-\mathbf{v}^T X + \mathbf{u}^T Y \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x}_o = 1$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y}_o = 1$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

出力ウェイト$u_{jo}\ (j = 1,\ldots,s)$の上限値と下限値に関しては〈U-1〉と〈L-1〉の目的関数をそれぞれ$u_{jo}\ (j = 1,\ldots,s)$に変更すればよい．また，このモデルの注目すべき点は制約条件のなかにある$\mathbf{v}^T \mathbf{x}_o = 1$，$\mathbf{u}^T \mathbf{y}_o = 1$の2式である．これらはDEA効率値が1である$\mathrm{DMU}_o$の仮想的入・出力はそれぞれ1になることに起因している．

4．おわりに

今後の研究展望としては，DEAの最適ウェイトが取りうる可能性をゼロ・ウェイトの回避策としての領域限定法へ拡張したり，算出された上限値と下限値の適用の可能性を探る余地がある．