相互評価の原理とその AHP,ANP への応用

01300450 日本大学　高橋磐郎　Iwaro TAKAHASHI
01011500 日本大学　大澤慶吉　Keikichi OSAWA
02991410 日本大学 *王 克義　Keyi WANG

1 序

美人コンテストであまり高く評価されなかった女性が審査員の審美眼にクレームを付けたとする．そこでマネージャーは，参加女性が審査員の審美眼を評価できるようなシステムを考えた．この際，審査員達の参加女性への評価と，参加女性達の審査員達への評価とをどのように統合化すればよいか．このような問題を相互評価(ME) 問題と呼ぼう．民主的世の中では全ての個人が自分の意見を主張する権利を持つ．大学でも教授が学生を評価すると同時に，学生が教授を評価する．企業でも上司が平社員を評価すると同時に平社員が上司を評価する．こうした傾向の中で ME 問題はますます重要になるだろう．ここではこの ME 問題解法の原理を提案し，それが AHP や ANP に適用できること，また，さらに選択科目制での学生の成績評価に有効であること等を示す．

2 基本方程式

個人の集合体 $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ があって，各個人 j は他の個人 i に評価値 $a_{ij} \geq 0$ を与える．このとき

$$\sum_{i \neq j} a_{ij} = 1 \quad (j = 1 \sim n) \qquad (1)$$

を仮定する．仮定 (1) はどの個人も平等の評価権利を持つことを裏書きしている．このとき $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ を評価行列 (EM) と呼ぶ．A の要素は非負で，各列での要素の和が 1 であるから確率行列となる．ここで提案する相互評価の原理とは，個人 j の総合評価 (SE)u_j は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \qquad (2)$$

で極まるとするものである．(2) を基本方程式 (FE) と言う．(2) は同時方程式だからその解uは定数倍だけ任意である．

3 ANP(Analytic Network Process) への適用

ANP は AHP の階層構造をネットワーク構造に拡張した方法で，T.L.Saaty 教授によって創始されたものである [1]．その中で一番簡単な例を示し，それが我々の ME の方法で解析できることを示そう．

アメリカにおいて，アメリカ車 (A)，ヨーロッパ車 (E)，日本車 (J) を，コスト (C)，修理システム (R)，耐久性 (D) の 3 つの評価基準によって評価しようとして，AHP と同じ一対比較から固有ベクトル法をによって評価した結果表 1 のような結果が得られたという．

表 1

	C	R	D
A	.637	.582	.105
E	.105	.109	.639
J	.259	.309	.258

表 2

	A	E	J
C	.634	.250	.400
R	.192	.250	.200
D	.274	.500	.200

一方 C, R, D の重要性は，A の立場から見るのと，E の立場から見るのと，J の立場から見るのとではそれぞれ違っていて，これらをやはり一対比較法から求めた結果が表 2 のようになったという．これらをどのように統合化すべきかが問題である．Saaty 教授はこれを超行列という方法を用いて解析しているが，ここではこれを我々の ME の問題として解析しよう．C, R, D, A, E, J をまとめて各個人と考え EM を作ると

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ C \\ R \\ D \\ A \\ E \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C & R & D & A & E & J \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .634 & .250 & .400 \\ 0 & 0 & 0 & .192 & .250 & .200 \\ 0 & 0 & 0 & .174 & .500 & .400 \\ .637 & .582 & .105 & 0 & 0 & 0 \\ .105 & .109 & .637 & 0 & 0 & 0 \\ .259 & .309 & .258 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

となり，これに対する FE の解として SE の値uを求めると，

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.105 \\ 0.163 \\ 0.226 \\ 0.140 \\ 0.134 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{—C} \\ \text{—R} \\ \text{—D} \\ \text{—A} \\ \text{—E} \\ \text{—J} \end{array}$$

を得る．これは [1] の結果と全く一致している．

4 強連結制と EME

EM 行列$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$に対して，$a_{ij}>0$なら点iからjへの矢線を考えることによって，有効グラフが対応するが，このグラフが強連結でないと FE の解の中にゼロとなるものが出てくることがわかる．たとえば図 1 の場合、$u_1=u_2=0, u_3=u_4$となって，u_1, u_2の評価の影響が失われ妥当な解が得られない．

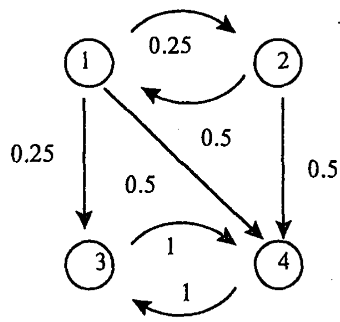

図 1

そこで ME の解析には EM の強連結性(これは行列としては既約行列と同値 [2]) が絶対条件となる．また評価対象をもたない個人が存在する場合も強連結性を失う．

しかし，実際の応用上は必ずしも強連結性をもたない場合には仮想的評価を考えて，強連結性を与えるようにする．これを拡張された相互評価(EME) と呼ぶ．

5 AHP への適用

よく知られた AHP の典型例は，ゴール，評価基準 $C_1,\cdots,C_c$，代替案 $S_1,\cdots,S_a$ からなる．これを ME の立場から見ると，$1+c+a$ 人の集合があって，ゴールの $C_1,\cdots,C_c$に対する評価が $v_1,\cdots,v_c$であって，各 C_jの $S_1,\cdots,S_a$に対する評価が $w_{1j},\cdots,w_{aj}$とすると，その EM は

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & C & S \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
C & \boldsymbol{v} & 0 & 0 \\
S & 0 & \boldsymbol{W} & 0 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_c \end{bmatrix}
\qquad
\boldsymbol{W}=(w_{ij}) \quad (3)$$

となる．

代替案は誰も評価しないから，これは当然強連結でない．そこで S のゴールに対する評価$\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$を挿入し，$\boldsymbol{A}$を

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{array}{c|ccc|}
\hline
1 & 0 & 0 & \boldsymbol{e} \\
C & \boldsymbol{v} & 0 & 0 \\
S & 0 & \boldsymbol{W} & 0 \\ \hline
\end{array}
\qquad (4)$$

に拡張すると，その FE の解は，C に対しては$\boldsymbol{v}$　，S に対しては$\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}$となり AHP の場合と一致する．

6 学生の成績評価

選択必修制

入試などで共通 (必修) 科目と選択科目のある場合を考える．簡単のため，3 科目 S_1, S_2, S_3があって，S_1が共通,S_1, S_2が選択であるとする．

表 3

	S_1	S_2	S_3	1	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$	n
S_1	0	0	0	1/2	$\cdots$	1/2	1/2	$\cdots$	1/2
S_2	0	0	0	1/2	$\cdots$	1/2	0	$\cdots$	0
S_3	0	0	0	0	$\cdots$	0	1/2	$\cdots$	1/2
1	a_1	b_1	0	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	a_k	b_k	0	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0
$k+1$	a_{k+1}	0	c_{k+1}	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	0	c_n	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0

受験生は n 人で k人が S_2を l人が S_3を選択した ($n=k+l$) とき，その採点結果が表 3 のようであったとする．$a_1,\cdots,a_n$等は和が 1 となるように基準化されているものとする (仮定 (1) 式)．

受験生は受験した科目に 1/2 ずつの評価を与えたとすると，$\boldsymbol{A}$は表 3 のようになり，その FE の解は，科目に対する SE を$\boldsymbol{u}^T=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$，受験生に対するものを$\boldsymbol{x}^T=\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$とすると，つぎのようになる．

$$u_2/u_1=a_I, u_3/u_1=a_{II},$$

$$a_I=a_1+\cdots+a_k, a_{II}=a_{k+1}+\cdots+a_n \quad (5)$$

$$(a_I+a_{II}=1)$$

$$x_i=a_i+a_I b_i, \quad i=1\sim k$$

$$x_i=a_i+a_{II} b_i, \quad i=k+1\sim n \quad (6)$$

(6) のような評価法は簡単であるが，今までに知られていなかったものである．

参考文献

[1] T L.Saaty, Decision Making with Dependence and Feedback:The Analytic Network Process, RWS Publications(1996).

[2] 伊藤、岩井、岩堀、上林、奥野、高橋,「行列とその応用」, 紀伊国屋書店,(1987).