ネットワーク型評価モデルと重要度ベクトルの導出について

01702180 静岡大学 八巻直一* Naokazu YAMAKI
01206310 静岡大学 関谷和之 Kazuyuki SEKITANI

1 はじめに

意思決定において，評価項目の重要度の比が主観に依存する場合が多い．階層的分析法 AHP(Analitic Hierarchy Process) は，このようなとき評価項目間の重要度の比を定量化する手法として有効であることが知られている．AHP では評価項目を階層化した上で，階層毎に複数の評価項目間の一対比較値からなる一対比較行列 X を用い，X から各評価項目の重要度を算出する．評価項目数を n とし，評価項目 j に対する評価項目 i の重要度の比率を x_{ij} とすると，一対比較値 x_{ij} は一対比較行列 X の i,j 要素である．一対比較値では $x_{ij} > 0$ かつ $x_{ij}x_{ji} = 1$ が成り立つ．もし，一対比較行列が無矛盾であれば，すべての要素について $x_{ij}x_{jk} = x_{ik}$ が成り立つ．このとき，X を完全整合であるという．

X が完全整合であれば，$X = W\mathbf{1}\mathbf{1}^TW^{-1}$ と表される．ここで，$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 であるベクトルである．また，$W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ である．このとき，項目間の重要度の比は $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ である．X は一般には完全整合ではなく，w の推定方法に**幾何平均法**と**固有ベクトル法**が知られている．

AHP では，評価項目を階層構造に分解することが重要である．もし，階層構造に分解されていないとすると，一対比較の組み合わせが爆発的に増え，評価項目のすべての組み合わせに対する一対比較を行うことは困難である．しかし，評価項目が階層的にならず，多くの評価項目が 1 階層となる場合もあり得る．例えば人事評価などにおいては，立場の異なる複数の評価者が存在し，同一の対象者を評価する場合，全評価項目の一部分について評価することになる．このようなとき，ある評価者は一部の評価項目間の一対比較しか行わないことになる．

本研究では，評価項目がすべて同一階層であり，複数の評価者が評価項目の集合の一部についてのみ一対比較を行うような評価をネットワーク型評価とよび，このときの重要度ベクトルの導出について考察する．

2 対数最小2乗法による重要度ベクトルの定義

重要度ベクトルの導出に関して，幾何平均法をとるか固有値法をとるかには，議論がある [1]．ここでは，より解釈が易しく，かつネットワーク型評価に適用しやすいという意味で，対数最小2乗法による重要度ベクトルの定義を採用する．次のような行列の集合を考える．

$$\begin{aligned} S \;=\{ \;& Z|Z = D\mathbf{1}\mathbf{1}^TD^{-1} \in R^{n\times n}, \\ & D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n), d_i > 0\} \end{aligned}$$

以下 $\tilde{a} = \log a$，$A = (a_{ij})$ に対して $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ と定義する．D の対角要素からなるベクトルを，$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$ とすると、

$$\tilde{S} = \{\tilde{Z}|\tilde{Z} = \tilde{d}\mathbf{1}^T - \mathbf{1}\tilde{d}^T\}$$

と表わされる．

本稿では，重要度ベクトルを次のように定義する．**一対比較行列 X が与えられたとき，**

$$r = \min_{\tilde{Z}\in\tilde{S}} \|\tilde{X} - \tilde{Z}\|$$

とする完全整合行列 W の重要度ベクトルを X の重要度ベクトルとする．この定義は，「**与えられた一対比較行列に最も近い完全整合行列の構成ベクトルを，重要度ベクトルとする．**」と解釈されるので，自然な意味付けと考えられる．ノルムにフロベニウス・ノルム $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{TR}(A^TA)}$ を用いれば，重要度ベクトルが次のように得られる．

$$w_i^* = \alpha \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_{ij}}$$

ただし，αは任意の正の実数である．また，このとき対数最小２乗誤差r^2は$r^2 = \|\tilde{X}\|_F^2 - \frac{2}{n}\|\tilde{X}\mathbf{1}\|^2$である．したがって，この場合の整合度を

$$CI = r/\|\tilde{X}\|_F \tag{1}$$

と表すことが考えられる．

3 ネットワーク型評価モデル

ネットワーク型評価では，一対比較行列Xの一部の要素しか定義されていない．定義されている要素の行と列のインデックスの集合をK，定義されていないインデックスの集合を$\bar{K}$とする．対数最小２乗法による重要度ベクトルの導出を用いることにする．$\tilde{X}$のKに属する要素を$\tilde{x}_{ij}, (i,j) \in K$とし，$\bar{K}$に属する要素には誤差がないものと仮定する．従って，$x_{i,j} = w_i/w_j, (i,j) \in \bar{K}$と見なされる．さらに，$l_i$を$(i,j) \in \bar{K}$の個数とすると，$\tilde{w}$に関する連立１次方程式が得られる．

$$Q\tilde{w} = B \tag{2}$$

ここで，

$$q_{i,j} = \begin{cases} n - l_i, & i = j \\ 1, & \substack{i \neq j \\ (i,j) \in \bar{K}} \end{cases} \quad b_i = \sum_{(i,j) \in K} \tilde{x}_{ij}$$

である．今，評価項目iをノードとし，評価項目iとjに一対比較が行われたときノードiとノードjに枝があるグラフを，比較対グラフと呼んでGとすると(2)はGの連結成分毎に独立に解ける．もしGが幾つかの連結成分に分割される場合は，成分毎に重要度ベクトルが導出され成分間は無関係となる．したがって，Gが連結グラフであるとき，全評価項目の重要度の比が得られることになる．

このときの整合度は，$\tilde{x}_{i,j} = 0, (i,j) \in \bar{K}$とおくことにより，(1)によって得られる．

4 複数の評価者が参加する場合

ネットワーク評価では，複数の評価者が各々の視野に応じた評価項目間の一対比較を行う．したがって，重要度ベクトルの導出は複数の一対比較行列を考慮しなければならない．

m人の評価者が存在し，k番目の評価者が提出した一対比較行列を$X^{(k)}$とする．前節と同様に，$K^{(k)}, \bar{K}^{(k)}$あるいは$l_i^{(k)}$を定義する．このとき，重要度ベクトルは以下のように定義される．

m個の一対比較行列$X^{(k)}$が与えられたとき，

$$r = \min_{\tilde{Z} \in \tilde{S}} \sum_{k=1}^{m} \|\tilde{X}^{(k)} - \tilde{Z}\|$$

とする完全整合行列Zの重要度ベクトルを複数評価者による重要度ベクトルとする．

もしすべての$\bar{K}^{(k)}$が空であれば，前節と同様にして重要度ベクトルは次のように与えられる．$w_i^* = \alpha \sqrt[mn]{\prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} x_{ij}}$ ただし，αは任意の正の実数である．

$\bar{K}^{(k)}$に空でないものが存在すれば，やはり前節と同様にして$\tilde{w}$に関する連立一次方程式

$$Q\tilde{w} = B \tag{3}$$

が得られる．ここで，$b_i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{(i,j)\in K} \tilde{x}_{ij}^{(k)}$ $Q = \sum_{k=1}^{m} Q^{(k)}$，$q_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} n - l_i, & i = j \\ 1, & \substack{i \neq j, \\ (i,j) \in \bar{K}^{(k)}} \end{cases}$ である．

方程式(3)において，$\frac{mn}{2} > \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{m} l_i^{(k)}$であれば$Q$は対角優位行列となり，一意解を持つ．この場合の比較対グラフGは，評価項目iと評価項目jについて一対比較が行われた人数を重さとする枝をはることによって定義される．Gのすべてのノードから出る枝の重さの和が$n/2$以上であれば，重要度ベクトルは一意に導出され、整合度は$r^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\tilde{X}\|_F^2 - \frac{2}{n}\|\sum_{k=1}^{m} \tilde{X}\mathbf{1}\|^2$である．

5 おわりに

本研究では社内ネットワーク上で意思決定を行う場合などを想定し，対象の評価視点が必ずしも一致しない複数の評価者が，評価項目の任意の部分集合に対して一対比較を行うことを前提とした．このような場合，全体の一対比較行列は大きなサイズのスパース構造行列となる．本研究では，多くの欠落がある一対比較行列から重要度ベクトルを導出する方法を提案した．

もし，比較対グラフが幾つかの連結成分に分離されるならば，評価項目がグルーピングされたことになる．今後の課題としては，評価項目のグルーピングと評価者のグルーピングへの本方法の適用などが考えられる．

参考文献

[1] 仁科　健、柴山忠雄，一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質管理，Vol.22,No.2,pp.115-123,1992