1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ある完備証券市場における均衡価格系に対する比較静学

東京都立大学　木島 正明　KIJIMA Masaaki
大阪大学　*大西 匡光　OHNISHI Masamitsu

1 はじめに

本報告ではある完備な証券市場における証券の均衡価格系に関する比較静学を行う．いわゆる Arrow–Debreu 証券を導入して状態価格を定義することにより，下記の 2 種の変化に対する証券の均衡価格系の変化はある単調性を持つことを示す: (1) 市場の投資家の不確実性に関する共有確率信念が尤度比優位の意味でシフトする場合; (2) 市場の投資家の Arrow–Pratt の意味での危険回避性が変化する場合．

2 証券市場モデル

1 期間の証券市場モデルを考える．期末の市場の状態からなる有限集合を $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ とする．市場には $n\ (=|\Omega|)$ 種の証券が存在するものとし，

$X_i\ (:\Omega\to\mathcal{R}),\ i=1,2,\cdots,n$：証券 i の期末の配当 (価格) を表す確率変数

と定義し，$x_{ij}=X_i(\omega_j)\ (\omega_j\in\Omega)$, $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^T$ とする．さらに，$n\times n$–配当行列 $X=(\boldsymbol{x}_1^T,\boldsymbol{x}_2^T,\cdots,\boldsymbol{x}_n^T)^T$ を定義する．

仮定 2.1 (完備性) 市場は完備である，すなわち，$\{\boldsymbol{x}_i : i=1,2,\cdots,n\}$ は線形独立である． □

各状態 $\omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対して，状態条件付き請求権 (Arrow–Debreu 証券) D_i を想定し，

$$D_i(\omega_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\qquad \omega_j\in\Omega$$

とする．このとき，$X_i=\sum_{j=1}^n x_{ij}D_j$ が成立する．いま，証券 D_i の期首の価格 (状態 ω_i の‘状態価格’) を p_i, X_i の期首の価格を q_i とすると，$q_i=\sum_{j=1}^n x_{ij}p_j\ (i=1,2,\cdots,n)$ が成立する．

さて，証券市場には m 人 $(m\geq 1)$ の投資家が存在し，投資家 $i\ (=1,2,\cdots,m)$ は順序組 (u_i,e_i) で規定される，ただし

$u_i\ (:\mathcal{R}\to\mathcal{R})$：投資家 i の期末の消費に対する von Neumann–Morgenstern (vN–M) 効用関数,

$e_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$：投資家 i の期末の状態 ω_j における消費に対する初期賦存量

であり，$\boldsymbol{e}_i=(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in})^T\in\mathcal{R}^n$ と定義する．さらに，すべての投資家について総和を取って，$\boldsymbol{e}=\sum_{i=1}^m \boldsymbol{e}_i\in\mathcal{R}^n$ を定義する．

すべての投資家は，期末の市場の状態に関する不確実性について，同一の確率的評価を持っており，

$\pi_i=P(\{\omega_i\})\ (>0),\ i=1,2,\cdots,n$：状態 ω_i に対する市場の共有確率信念

とし，$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)^T\in\Delta^n$ と定義する，ただし Δ^n は n 次元確率分布ベクトルの全体である．

仮定 2.1 より市場は完備であるから，投資家 i の最適化問題は，決定変数として

$c_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$：期末の状態 ω_j における消費量

を持つ，次の数理計画問題として表すことができる:

$$(\mathbf{PS})_i\quad\left|\begin{array}{ll}\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^n \pi_j u_i(c_{ij})\\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^n c_{ij}p_j\leq\sum_{j=1}^n e_{ij}p_j\end{array}\right.$$

以後，投資家 i の消費計画を $\boldsymbol{c}_i=(c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in})^T\in\mathcal{R}^n$ と表す．

以上から，証券市場モデルは順序組 $(((u_i,e_i);i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{\pi},X)$ により記述される．

3 均衡価格系

定義 3.1 (均衡) 証券市場モデル $(((u_i,e_i);i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{\pi},X)$ における均衡とは，各投資家 $i\ (=1,2,\cdots,m)$ の消費計画 $\boldsymbol{c}_i$ と状態価格系 $\boldsymbol{p}$ との順序組 $((\boldsymbol{c}_i;i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{p})$ で，以下の 2 条件を満たすものを言う:

(C1) 状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を所与とすると，各投資家 $i\ (=1,2,\cdots,m)$ の消費計画 $\boldsymbol{c}_i$ は数理計画問題 $(\mathrm{PS})_i$ の最適解である,

(C2) $\sum_{i=1}^m \boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{e}$. □

いま，投資家の重みづけベクトル $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^T\in\mathcal{R}_+^m$ に対して，(効用) 関数 $u_{\boldsymbol{w}}\ (:\mathcal{R}\to\mathcal{R})$ を

$$u_{\boldsymbol{w}}(y)=\sup\left\{\sum_{i=1}^m w_iu_i(x_i):\sum_{i=1}^m x_i\leq y\right\},\quad y\in\mathcal{R}\tag{3.1}$$

で定義する．

本報告では市場の完備性を仮定しているので (仮定 2.1)，厚生経済学の第 1 定理から，次の定理を得る．

定理 3.1 $((\boldsymbol{c}_i;i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{p})$ を証券市場モデル $(((u_i,e_i);i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{\pi},X)$ の均衡であるとする．このとき，ある重みづけベクトル $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^T\in\mathcal{R}_+^m$ が存在して，vN–M 効用関数 $u_{\boldsymbol{w}}$, 初期賦存量 $\boldsymbol{e}\ (=\sum_{i=1}^m \boldsymbol{e}_i)$ を持つただ 1 人の投資家からなる証券市場モデル $((u_{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{e}),\boldsymbol{\pi},X)$ において，$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})$ は均衡を与える． □

この定理から $((c_i; i=1,2,\cdots,m), p)$ を証券市場モデル $(((u_i, e_i); i=1,2,\cdots,m), \boldsymbol{\pi}, X)$ の均衡であるとすると, ある重みづけベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathcal{R}_+^m$ が存在して, 状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を所与とすると, 消費計画 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ は, vN-M 効用関数 $u_{\boldsymbol{w}}$, 初期賦存量 $\boldsymbol{e}$ を持つ投資家 $(u_{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{e})$ の次の最適化問題の最適解でなければならない (条件 C2):

$$
(\mathbf{PS}) \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pi_j u_{\boldsymbol{w}}(c_j) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j p_j \leq \sum_{j=1}^{n} e_j p_j. \end{array} \right.
$$

以下では, 簡単のため, $u = u_{\boldsymbol{w}}$ と表し, 投資家 $(u, \boldsymbol{e})$ を市場の統合的投資家と呼ぶことにする.

仮定 3.1 市場の統合的投資家の vN-M 効用関数 u $(: \mathcal{R} \to \mathcal{R})$ は 2 階微分可能で, $u' > 0$, $u'' \leq 0$, ただし u', u'' は, それぞれ u の 1 階および 2 階導関数である. □

均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を, 統合的投資家の vN-M 効用関数 u と市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ で特徴づけるために, 上記の数理計画問題の最適性の条件を吟味する.

一般性を失うことなく, $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ と状態が番号付けられているものとする. このとき, $u'' \leq 0$ より,

$$
u'(e_1) \geq u'(e_2) \geq \cdots \geq u'(e_n) \ (> 0) \tag{3.2}
$$

が成立することに注意する. また, 同じく, $u'' \leq 0$ より, 数理計画問題 (PS) は凸計画問題となっている.

消費計画 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ は問題 (PS) に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たさなければならないことから, $p_i = \pi_i u'(e_i)/\lambda$ を得る, ただし $\lambda\ (> 0)$ は Lagrange 乗数である.

状態価格系 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ には正の乗数分の任意性があるため, 正規化条件として, $\sum_{i=1}^{n} e_i p_i = 1$ を設ければ:

定理 3.2 均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ は次の関係式を満足する:

$$
p_i = \frac{\pi_i u'(e_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \pi_k \{e_k u'(e_k)\}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.3}
$$

□

4 市場の共有確率信念の与える影響

本節では,

- 市場に存在する証券の種類とその期末の配当, すなわち X に変化が無く,
- 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, M)$ の vN-M 効用関数 u_i と初期賦存量 $\boldsymbol{e}_i$ に変化が無く,

したがって

- 市場の統合的投資家の vN-M 効用関数 u と初期賦存量 $\boldsymbol{e}$ に変化が無い

ものと仮定して, 証券市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p}$ に与える影響を調べる.

定義 4.1 (尤度比優位) $\boldsymbol{\alpha}^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \cdots, \alpha_n^j)^T \in \Delta^n$, $j = 1, 2$ を Ω 上の 2 つの確率分布 (n 次元確率分布ベクトル) とする. α_i^j が i と j に関して TP_2 (Totally Positive of order 2), すなわち

$$
\begin{vmatrix} \alpha_i^1 & \alpha_k^1 \\ \alpha_i^2 & \alpha_k^2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k \leq n \tag{4.1}
$$

が成立するとき, $\boldsymbol{\alpha}^2$ は $\boldsymbol{\alpha}^1$ より, 尤度比優位の意味で大きいと言い, $\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\alpha}^2$ と書く. □

さて簡単のため, 証券 $j = 1, 2, \cdots, n$ とそれらから構成される証券ポートフォリオを代表して,

$X\ (: \Omega \to \mathcal{R})$: ある証券ポートフォリオの期末の配当を表す確率変数

とし, $x_i = X(\omega_i)\ (\omega_i \in \Omega)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ と表し, その期首の価格を q で表す.

定理 4.1 もし x_i が i に関して増加 (減少) であるならば,

$$
q \leq (\geq) \frac{1}{R}\ E_{\boldsymbol{\pi}}[X] \tag{4.2}
$$

が成立する. □

$E_{\boldsymbol{\pi}}[X] - qR$ は証券ポートフォリオの期待超過収益と同じ符号を持つことに注意すれば, 定理 4.1 は“市場の期末の総消費量と‘正 (負) に連動する’収益を持つ証券ポートフォリオの期待超過収益は正 (負) である” ことを述べている.

いま, 共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ として 2 種 $\boldsymbol{\pi}^j$, $j = 1, 2$ を考え, それらに対応する $\boldsymbol{p}$, q, R を, それぞれ $\boldsymbol{p}^j$, q^j, R^j, $j = 1, 2$ で表すことにする.

定理 4.2 市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が, 尤度比優位の意味で大きくなれば, 安全資産の期首の価格は減少する, したがってその無危険利子率は増加する, すなわち $\boldsymbol{\pi}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\pi}^2$ ならば $R^1 \leq R^2$ が成立する. □

定理 4.3 $\boldsymbol{\pi}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\pi}^2$ と仮定する. もし x_i が i に関して増加 (減少) であるならば,

$$
q^1 R^1 \leq (\geq) q^2 R^2 \tag{4.3}
$$

が成立する. □

定理 4.3 は“市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が尤度比優位の意味で大きくなれば, 市場の期末の総消費量と‘正 (負) に連動する’期末の配当を持つ証券ポートフォリオの, 安全資産を numéraire とする期首の価格は増加 (減少) する” ことを述べている.

5 市場の危険回避性の与える影響

紙面の制約上, 省略する.

参考文献

[1] Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd Ed., Princeton University Press, Princeton, 1996.

[2] Huang, C. and Litzenberger, R. H., *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, New York, 1988.