1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

種々のポートフォリオ選択問題と数値実験による考察

京都大学 *橋口 浩隆 HASHIGUCHI Hirotaka
01704164 京都大学 柳浦 睦憲 YAGIURA Mutsunori
01001374 京都大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 はじめに

ポートフォリオ選択問題とは, 投資対象となる n 銘柄に対する投資額の比率 (ポートフォリオ) $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を決定する問題である. これは株価の確率分布が与えられたとき, 一定の期待収益率を確保した上で投資の危険性を表すリスク関数を最小化するという形の最適化問題として定式化される. 本研究では様々なリスク関数に対する最適化問題を実際の市場より得られたデータを用いて解き, 得られた解について検討を行い, それぞれのモデルの特徴について考察を行った.

以下では各銘柄の収益率分布は T の離散的なデータ, 即ちシナリオ (各シナリオの生起確率は p_t) により与えられるものとする. シナリオ t の時の収益率分布は $(r_{1t},\cdots,r_{nt})$ と表される. 従って r_t をシナリオ t の時のポートフォリオの収益率, r をポートフォリオの期待収益率とすると, これらは以下のように表される.

$$r_t=\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j,\quad r=\sum_{t=1}^{T} p_t r_t$$

2 種々のモデル

平均・分散モデル：平均・分散モデル (MV モデル) は, 収益率の分散をリスクと考え, これを最小化するという最適化問題として表される [2].

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t(r_t-r)^2 \\ \text{s.t.} & r\geq\rho,\ \boldsymbol{x}\in X \end{array} \qquad (1)$$

ここで ρ は投資家の最低期待収益率, また X は投資可能集合である. このモデルは, r 一定の条件下では, 期待効用最大化モデルを 2 次近似した問題に対する最適解を求めるという, 理論的に興味深い性質を持つ. しかし, r を下回る場合と上回る場合の両方を対称的にリスクとして見積もる点が不自然であると指摘されている.

下半モーメント最小化モデル：リスク関数として k 次の下半モーメントを考える. これは $\sum_{t=1}^{T} p_t(\max(r-r_t,0))^k$ と表される. 即ちリスクを期待収益率 r を下回る部分の k 乗としたものであり, これを最小化する問題を下半モーメント最小化モデルと呼ぶ.

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t(\max(r-r_t,0))^k \\ \text{s.t.} & r\geq\rho,\ \boldsymbol{x}\in X \end{array} \qquad (2)$$

一般に, 期待収益率を下回る部分と上回る部分それぞれの偏差の総和の絶対値は等しいので, $k=1$ としたときには絶対偏差をリスク関数とした平均・絶対偏差モデル (MAD モデル)[2] と等価な問題になる. また, r を定数 θ (θ は投資家の収益率最低目標水準) で置き換えたものは平均・下方部分積率モデル (MLPM モデル) と呼ばれる.

最小収益率最大化モデル：全てのシナリオ中で最も収益率の低いもの, 即ち $\min_{t\in\{1,\cdots,T\}} r_t$ を最小収益率とし, これを最大化するモデルを考える. これを最小収益率最大化モデル (MAXMIN モデル) と呼ぶ. これは以下の線形計画問題として定式化可能である.

$$\begin{array}{ll} \max & w \\ \text{s.t.} & r_t-w\geq 0,\ t=1,\cdots,T \\ & r\geq\rho,\ \boldsymbol{x}\in X \end{array} \qquad (3)$$

またこの最小収益率に関する制約は他のモデルに付加することもできる.

リグレット最小化モデル：投資家のリグレットを最小化するモデルが King により提唱されている [1]. τ_t をシナリオ t で実現しうる最大の収益率, すなわち

$$\tau_t=\max_{j\in\{1,\cdots,n\}} r_{jt}$$

とおく. τ_t と実際の収益率 r_t との偏差の 2 乗の総和をリグレットと呼び, これを最小化する問題 (REGRET モデル) で, 以下のように定式化できる.

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t(r_t-\tau_t)^2 \\ \text{s.t.} & r\geq\rho,\ \boldsymbol{x}\in X \end{array} \qquad (4)$$

重みつき分散歪度最小化モデル：定数 α (<0) によって定まる凸関数

$$g(z_t)=\begin{cases} {z_t}^2+\alpha {z_t}^3, & z_t<-\frac{1}{3\alpha} \\ -\frac{1}{3\alpha}z_t-\frac{1}{27\alpha^2}, & z_t\geq-\frac{1}{3\alpha} \end{cases} \qquad (5)$$

を考え (ただし $z_t=r_t-r$), この関数 $g(z_t)$ をリスク関数として最小化する. これを重みつき分散歪度最小化モデル (WVS モデル) と呼ぶ (なお, ここでは歪度 k を $k=\sum_{t=1}^{T} p_t z_t^3$ と定義する). $g(z_t)$ は凸関数なので, このモデルは数理計画法により効率的に厳密解を求めることができる. 現実の投資家は, 期待収益率を大きく下回る部分が僅かな確率でも存在す

ることを好まず，従って分散が同程度なら歪度の大きなポートフォリオを好むことが知られているが，適当な α に対してこのモデルを解くことにより，MV モデルと同程度の分散で歪度のより大きな解を得ることができる．また，α を適切な値にとると，期待効用最大化モデルの 3 次までのテーラー展開の近似となるため，MV モデルよりも期待効用に対する良い近似となる．更に，平均と分散をパラメータとして歪度を最大化するモデルを解くために，[3] では，混合整数計画問題による定式化が採用されている．これに対し，様々な α に対して WVS モデルを解くことにより，等価な問題をより効率的に解くことができると考えられる．

3 数値実験

本研究では，様々なモデルによる最適ポートフォリオを比較するため，東証 1 部・2 部市場の主要 206 銘柄について，1991 年 10 月から 1996 年 12 月までの 62 期間の月次収益率を求め，各期間の生起確率を 1/62 としたヒストリカル・データをシナリオに用いてそれぞれの最適化問題を解いた．各モデルの最低期待収益率を $\rho = 0.01$ とし，得られた最適ポートフォリオの様々な性質について検討した．ここではその一部を示す．以下では，(2) で $k = 2.0$ としたモデル，WVS モデルのリスク関数 (5) で $-\alpha/3 = 1.00$ としたモデル，そして全 206 銘柄を等しい割合で有するポートフォリオを，それぞれ LOW-2.0, WVS-1.00, 及び index と呼ぶことにする．各ポートフォリオの平均，分散，歪度，及び構成銘柄数を表 1 に示す．この表より，以下のことが分かる．

表 1: 各ポートフォリオの平均，分散，歪度，及び構成銘柄数 N.

モデル	平均	分散	歪度	N
MV	0.010	0.0018	-0.0306×10^{-3}	14
MAD	0.010	0.0019	-0.0505×10^{-3}	12
LOW-2.0	0.010	0.0019	-0.0105×10^{-3}	14
MAXMIN	0.010	0.0029	0.0393×10^{-3}	7
REGRET	0.034	0.0168	1.6123×10^{-3}	3
WVS-1.00	0.010	0.0018	-0.0294×10^{-3}	13
index	0.001	0.0033	0.0353×10^{-3}	206

- MAXMIN は MV に比べ，分散がやや大きいものの，歪度のより大きなポートフォリオを生成した．
- REGRET は平均，歪度は大きいが，分散も非常に大きく，収益率分布は不安定である．また構成銘柄数も少なく，個々の構成銘柄の影響を受けやすい．
- LOW-2.0, WVS-1.00 は分散は MV や MAD とほぼ同じながら歪度はやや大きい．

なお，図 1 に特徴のある 3 種の最適ポートフォリオの収益率分布を示すが，表 1 の結果を反映したものとなっている．また，図 2 に各ポートフォリオの 3ヶ月間の運用益を示す．REGRET は実際の運用においてはリスクが大きいこと，また MAXMIN は表 1 の分散の大きさや構成銘柄数の少なさの割に大きな損失は被っていないことなどがわかる．

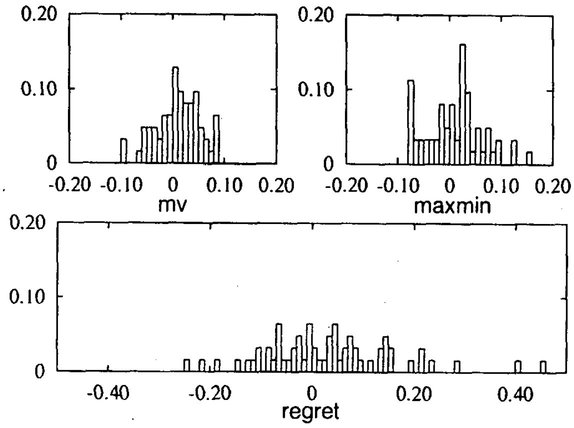

図 1: 各ポートフォリオの収益率分布

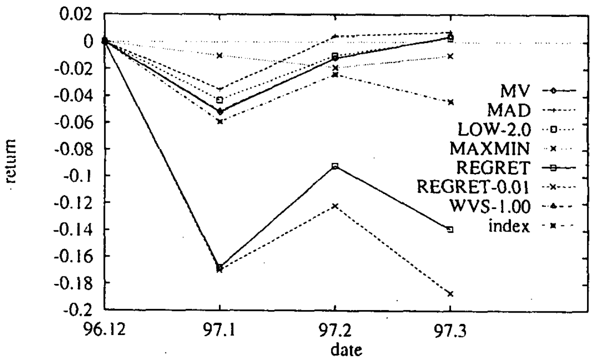

図 2: 各ポートフォリオの運用益

4 まとめ

本研究では，様々なポートフォリオ選択問題に対し，ヒストリカル・データを用いて解を求め，得られた解について検討した．非常に特徴ある解を生成するモデルや従来の MV モデルとさほど変わらない解を生成するモデルなど，それぞれのモデルの特徴と実用性について検討できた．

参考文献

[1] A. J. King, "Asymmetric risk measures and tracking models for portforio optimization under uncertainty," *Annals of Operations Research*, Vol. 45, pp. 165-177, 1993.

[2] 今野浩，理財工学 I，日科技連，1995.

[3] H. Konno and K. Suzuki, "A mean absolute deviation skewness portfolio optimization model," *Annals of Operations Research*, Vol. 45, pp. 205-220, 1993.