1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

マーケティング活動労力の配分

01007584 大阪工業大学 一森 哲男 ICHIMORI Tetsuo

1 はじめに

マーケティング活動には，広告活動や販売促進活動などがあるが，これらの活動は広い地域を対象とするものと狭い地域を対象とするものを含んでいる．例えば，広告活動において，テレビ，ラジオ，新聞，雑誌などを媒体としたものは広い地域を対象としているが，ネオンサインや看板などを利用したものは狭い地域を対象にしている．販売促進活動においても，例えば，景品の当たるキャンペーンなどは広い地域を対象としているが，試供品の配布などは狭い地域を対象としている．

ここでは，広い地域は多くの狭い地域から構成されていると考え，各広い地域間および狭い地域間の重なりはないものと仮定する．また，各(広いまたは狭い)地域での活動において，投入労力はその地域全体に均一に作用するものと考える．

広い地域は全体で n 個あるとし，i 番目の広い地域は全部で m_i 個の狭い地域を持つものとする．各地域での効用は指数関数で表されると仮定する．２重添え字 ij は i 番目の広い地域の中の j 番目の狭い地域を示す．地域 ij での潜在的需要量を定数 p_{ij} で，投入労力を変数 x_{ij} で表す．このときの，まだ需要化していない量は $p_{ij}e^{-a_{ij}x_{ij}}$ で表せるとする．ここで，定数 a_{ij} は地域 ij で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．添え字 i は i 番目の広い地域を示すが，ここに労力 y_i を投入すると(全ての労力 $x_{ij}=0$ とする)，需要化していない量は上記と同じように $\left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\right) e^{-b_i y_i}$ と書けるとする．同様に，定数 b_i は地域 i で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．狭い地域と広い地域全体で使用できる労力の総和を定数 B で表すと，我々の問題はつぎのように定式化できる．

$$(P) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}} \right) e^{-b_i y_i}$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} + y_i \right) \le B$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m_i)$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

ここで定数 $p_{ij} > 0$, $a_{ij} > 0$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m_i)$, $b_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$ とする．また，$0 < B < \infty$ とする．

問題 (P) は閉凸集合上の凸関数の最小化問題であるので，この問題は必ず最適解を持つ．この問題 (P) は非線形計画問題であるので，非線形計画法の適当なアルゴリズムを用いれば解けるが，ここでは組合せ最適化の手法を利用してより効率的に解く方法を考える．

2　解法

まず，新しい変数 $z_i \geq 0$ を導入して $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i$ と置いてやると，問題 (P) はつぎの n 個の問題 $(Q_1), \ldots, (Q_n)$ をつくりだす．

$$(Q_i) \qquad f_i(z_i) = \min_{x_{i1},\ldots,x_{im_i}} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, m_i)$$

ところで，この問題は容易に解くことが可能で，関数 $f_i(z_i)$ も陽に (explicitly) 表現できる．関数 $f_i(z_i)$ は狭義減少で狭義凸の滑らかな関数である．すると，問題 (P) はつぎのように書くことが出来る．

$$(P') \qquad \min \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i) e^{-b_i y_i}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{n} (z_i + y_i) \leq B$$

$$z_i \geq 0,\ y_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ここで，目的関数 $f_i(z_i)e^{-b_i y_i}$ は凸関数であることが言えるので，クーン-タッカー条件を満足する変数の値が問題 (P') の最適解であることがわかる．

最適性の条件　問題 (P') の実行可能解 (z_i, y_i) が最適解となるための条件はつぎの通りである．

(i) $z_i > 0$ ならば $\lambda = -f_i'(z_i)e^{-b_i y_i} < -f_i'(0)e^{-b_i y_i} \leq -f_i'(0)$,

(ii) $z_i = 0$ ならば $\lambda \geq -f_i'(0)e^{-b_i y_i}$,

(iii) $y_i > 0$ ならば $\lambda = b_i f_i(z_i)e^{-b_i y_i} < b_i f_i(z_i) \leq b_i f_i(0)$,

(iv) $y_i = 0$ ならば $\lambda \geq b_i f_i(z_i)$.

これらを利用して効率的な解法を考える．