1－D－1

1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

期待利得を支払関数とする目標と捜索者のゲーム問題

1504810 防衛大学校　*宝崎隆祐　　1000890 防衛大学校　飯田耕司

1．はじめに

ここでは，いくつかの経路を選択する自由をもつ目標と手持ちの捜索資源量を配分することにより目標を探知しようとする捜索者との間の２人ゼロ和ゲームを取り扱っている．この種の問題のうち，支払関数が指数関数で与えられるような探知確率尺度のゲーム問題がIidaら[1]により，支払関数が期待利得で捜索者の経路が既知である場合のゲーム問題が宝崎，飯田[2]らにより研究されている．本研究では，これらの研究を含む問題として位置づけられる次のようなモデルを考える．

目標側は有限個の経路のいずれか１つを自己の経路として選択することができ，捜索者側は手持ちの捜索資源の時間的空間的な配分を決めることができる．捜索はある有限の離散時点で実施され，捜索者が目標を探知した場合ゲームは終了し，正の価値を捜索者は獲得するが，捜索資源の配分には時間，空間に依存する捜索コストを要する．支払関数を捜索終了までの期待利得とした場合の目標及び捜索者間の２人ゼロ和ゲームの解を求めることが，本研究のねらいである．

2．モデルの記述と定式化

ここでは，まず問題の前提について述べ，支払関数である期待利得を求める．(1) 有限時点数の離散時間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ 及びセルで表現される離散空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ 上で、目標の移動及び捜索が行われる．(2) 目標は，有限個の経路（パス）群Ωから自己の経路を１つ選ぶ．経路$\omega\in\Omega$の各時点tでの移動地点$\omega(t)\in\boldsymbol{K}$は既知である．(3) 捜索者は各時点$t$で捜索資源総量$u(t)$を持ち，それを各セルに任意に分割して配分することができる．セルiに配分された捜索資源量$\varphi(i,t)$により，そこに目標が存在した場合の探知は確率$1-\exp(-\alpha_i\varphi(i,t))$で生じるものとする．ただし，$\alpha_i>0$である．(4) 時刻$t$，セル$i$で目標を探知した場合には捜索者は価値$V(t)$を獲得できるが，捜索資源量に比例するコスト（単価$c_0(i,t)$）がかかる．ただし，$V(t)$は時間$t$に対し非増加であるとする．(5) 捜索は，目標が探知された時点，または，最終捜索時点Tでの捜索が終了した段階で終わりとなる．

捜索者側は，時点tにおけるセルiへの捜索資源配分量$\varphi(i,t)$による純粋戦略をとり，目標側は，パス$\omega\in\Omega$の純粋戦略をとるものと考える．このとき，$[1,t]$間での総捜索コスト$C(t,\varphi)$，探知確率$P_1^t(\omega,\varphi)$及び$[1,T]$間の期待利得$R(\omega,\varphi)$はそれぞれ次式で与えられる．

$$C(t,\varphi)=\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{i=1}^{K}c_0(i,\tau)\varphi(i,\tau)\ ,\qquad P_1^t(\omega,\varphi)=1-\exp\left(-\sum_{\tau=1}^{t}\alpha_{\omega(\tau)}\varphi(\omega(\tau),\tau)\right)\ , \tag{1}$$

$$R(\omega,\varphi)=\sum_{t=1}^{T}(V(t)-C(t,\varphi))(P_1^t(\omega,\varphi)-P_1^{t-1}(\omega,\varphi))-C(T,\varphi)(1-P_1^T(\omega,\varphi))\ . \tag{2}$$

この関数$R(\omega,\varphi)$は$\{\varphi(i,t),\ i\in\boldsymbol{K}\ t\in\boldsymbol{T}\}$に関しての狭義凹関数となり，捜索者の最適戦略は純粋戦略φ、目標のそれはパス$\omega\in\Omega$を選択する確率が$\pi(\omega)\geq 0$である混合戦略$\{\pi(\omega),\ \omega\in\Omega\}$で与えられる．もちろん，$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1$である．以降，記号$\omega$はある個別のパスを、$\pi$はパスの選択確率を表すものとする．捜索者が純粋戦略$\{\varphi(i,t)\}$を、目標が混合戦略πをとった場合の期待利得$R(\pi,\varphi)$、すなわち支払関数は$R(\pi,\varphi)=\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)R(\omega,\varphi)$で表される．

3．ゲームの解

上述した支払関数により，ゲームは$R(\pi^*,\varphi^*)=\min_\pi\max_\varphi R(\pi,\varphi)=\max_\varphi\min_\pi R(\pi,\varphi)$となる$\pi^*$，$\varphi^*$を求めることにより解かれるが，$\max_\varphi\min_\pi R(\pi,\varphi)$は以下の問題と同値である．

$$\max_{\varphi}\ \nu\quad s.t.\quad R(\omega,\varphi)\geq\nu\ ,\ \varphi(i,t)\geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{K}\varphi(i,t)\leq u(t)\ ,\qquad i\in\boldsymbol{K}\ \ t\in\boldsymbol{T}\ \ \omega\in\Omega.$$

今、ラグランジュ乗数として$\lambda(t)$，$\mu(i,t)$，$\pi(\omega)$を使うと，最適解の満たすべきKuhn-Tucker 条件は次で与えられる．

$$\lambda(t)\geq 0\ ,\ \ \mu(i,t)\geq 0\ ,\ \ \varphi(i,t)\geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{K}\varphi(i,t)\leq u(t)\ ,\qquad i\in\boldsymbol{K}\ \ t\in\boldsymbol{T}\ , \tag{3}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)\frac{\partial R(\omega,\varphi)}{\partial\varphi(i,t)}-\lambda(t)+\mu(i,t)=0\ ,\qquad i\in\boldsymbol{K}\ \ t\in\boldsymbol{T}\ , \tag{4}$$

$$\lambda(t)(u(t)-\sum_{i=1}^{K}\varphi(i,t))=0\ ,\quad \mu(i,t)\varphi(i,t)=0\ ,\qquad i\in\boldsymbol{K}\ \ t\in\boldsymbol{T}\ , \tag{5}$$

$$\pi(\omega)\geq 0\ ,\quad 1-\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=0\ ,\quad \pi(\omega)(R(\omega,\varphi)-\nu)=0\ ,\qquad \omega\in\Omega\ . \tag{6}$$

Kuhn-Tucker 条件(3)〜(5)は，実は目標のパス選択確率がπで与えられた場合の期待利得の最大を与える必要十分条件になっており，この最適化問題$\max_{\varphi} R(\pi,\varphi)$に関しては，すでにIida and Hohzaki[3] らによる効率的な解法がある．そこで，πを変化させながら$\max_{\varphi} R(\pi,\varphi)$を解いて，その最適解$\varphi^*_\pi$を求めつつ，最終的に(6)式の条件も満たすようにするという数値的解法が考えられる．

4．数値解法アルゴリズム

数値計算アルゴリズムの終了条件として，以下の補題が利用できる．

補題　あるパス$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s\in\Omega$と実数$m$に対して次が成立しているとする．

$$R(\omega_1,\varphi^*_{\pi^*}),\cdots,\ R(\omega_s,\varphi^*_{\pi^*})>m\ ,\qquad R(\omega,\varphi^*_{\pi^*})=m\ ,\ \forall\omega\in\Omega/\{\omega_1,\cdots,\omega_s\}\ , \tag{7}$$

$$\pi^*(\omega)=0,\ \omega\in\{\omega_1,\cdots,\omega_s\}\ . \tag{8}$$

このとき，π^*，$\varphi^*_{\pi^*}$がゲームの解であり，ゲームの値はmである．

数値計算アルゴリズムとして，以下のものを提案する．

(Step1)　$\pi(\omega)$, $\omega\in\Omega$の初期値設定をする．たとえば，等確率$\pi(\omega)=1/|\Omega|$とする．$count=0$とする．

(Step2)　πに対して，$\max_{\varphi} R(\pi,\varphi)$を解いて最適解$\varphi^*_\pi$を求める．

(Step3)　$\{R(\omega,\varphi^*_\pi),\ \omega\in\Omega\}$を値の小さい順$Rew_1$，$Rew_2,\cdots$，$Rew_M$に並べ，その値に従って$\omega\in\Omega$を分類する．すなわち，$\Omega_1\subseteq\Omega$は，最小の期待利得$Rew_1$をもつパス群，$\Omega_2$は第２最小の値$Rew_2$をもつパス群，$\cdots$，$\Omega_M$は最大の期待利得$Rew_M$をもつパス群であるとする．このとき，補題の条件が成り立っていれば終了．そうでなければ，(Step4)へいく．

(Step4)　$count$が偶数ならば，後述する計算法を用いて，$\omega\in\Omega_1$の$\pi(\omega)$を$\Delta\pi(\omega)$だけ増加させる．
$count$が奇数ならば，後述する計算法を用いて，最大の$R(\omega,\varphi^*_\pi)$をもち$\pi(\omega)>0$である$\omega\in Rew_{M'}$に対し，$\pi(\omega)$を$\Delta\pi(\omega)$だけ減少させる．$count=count+1$として(Step2)へ戻る．

(Step4)の増加／減少量$\Delta\pi(\omega)$を以下の方法で計算する．(Step3)において，Ωのパス群をその期待利得の大きさにより分類するが，最大の$R(\omega,\varphi^*_\pi)$をもち，かつ$\pi(\omega)>0$であるωが$\Omega_{M'}$に属しているものとする．このM'によりγを次のように設定する．(i) $M'=1$の場合は，補題が成立しアルゴリズムは終了する．(ii) $M'=2$の場合は，$\{\pi(k),\ k\in\Omega_1\}$については，$\gamma=(Rew_{M'}-Rew_1)/2$とし，$\{\pi(k),\ k\in\Omega_{M'}\}$についても同じ$\gamma$を用いる．(iii) $M'>2$の場合は，$\omega\in\Omega_1$に関しては，$\gamma=Rew_2-Rew_1$とし，$\omega\in\Omega_{M'}$に関しては，$\gamma=Rew_{M'}-Rew_{M'-1}$とする．

上のγを用いて，パスkの$\pi(k)$の増加／減少量を$\Delta\pi(k)=\gamma/(\overline{R}_k-\underline{R}_k)$で算出する．ただし，$\overline{R}_k$及び$\underline{R}_k$は以下で定義したものである．$\overline{R}_k=\max_{\varphi} R(k,\varphi)$, $\underline{R}_k=\min_{\omega\neq k} R(k,\varphi^*_\omega)$.

5．数値例

紙数の関係から，数値例については発表会の席上で述べる．

参考文献

[1] Iida, Hohzaki and Furui, *JORSJ*, **39**(4), pp.501–511, 1996.12.

[2] 宝崎, 飯田, 日本ＯＲ学会*1996*年度春季研究発表会アブストラクト集, pp.151–153, 1996.3.

[3] Iida and Hozaki, *JORSJ*, **31**(3), pp.294–320, 1988.9.