# ネットワーク信頼度計算の実際

01009200 東京大学 *今井 浩 IMAI Hiroshi
02202230 東京大学 関根京子 SEKINE Kyoko
01012360 中央大学 今井桂子 IMAI Keiko

## 1 はじめに

グラフ $G$ の各枝が確率 $p$ で独立に消滅するとき，残った枝からなる部分グラフが連結である確率を，このグラフの全端子信頼度 $R(G;p)$ と呼ぶ．これは無向グラフでの全端子間1連結度の基本問題で，元々はシステム解析などでの動機からグラフの問題として定式化され，組合せ論における一つの深い分野を構成している．たとえば，ネットワーク信頼度に関する本として [3, 4, 10] がある．

このネットワーク信頼度計算の問題は，計算量理論の観点から#P 完全と厳密に大規模問題を解くのが難しいことが示されている．一方，最近，ランダム化 FPTAS (Fully Polynomial-Time Approximation Scheme) の提案 [1, 6] がされており，また著者ら [5, 8] が BDD のアイデアを用いた指数部が低次の指数時間アルゴリズムなどを提案している．

本稿では，その著者らのアルゴリズムによって，どのぐらいの大きさのネットワークまで信頼度が正確に解析できるかを実験例で示す．また，十分に各枝の信頼性が高い場合のシステムの信頼度の解析で，信頼度多項式の低次の項のみ計算する手法の実用性に関する実験結果も示す．

## 2 信頼度関数計算の種々の側面

**計算量の観点から** 計算量理論の観点からは，ネットワーク信頼度計算の問題は，一般に#P 完全な問題である．Valiant [11] は全端子信頼度・2端子信頼度の問題の#P 完全性をその#P 完全性に関する最初の論文で示している．他に平面性や無有向閉路性などのもとでも2端子間信頼度計算が#P 完全であることがわかっている．従って一般に，大規模ネットワークの信頼度を厳密に実用的時間内で求めることは難しいと思われている．そのため，厳密解法で組合せ爆発が起こる部分を少しでも改善しようという研究，近似解法として信頼度の上限下限を多項式時間で求めること，またモンテカルロ法で確率的に近似解を求めることが考えられてきた．

**Monte Calro 近似解法** ランダム化 (randomization) を用いた近似解法については，計算量・アルゴリズム理論的観点から，80 年代に Karp, Luby によって平面グラフで枝消滅確率が極端に小さくない場合に対するランダム化 FPTAS(Randomized Fully Polynomial-Time Approximation Scheme) が開発されていた．最近，一般の場合に対するランダム化 FPTAS が Alon, Frieze, Welsh [1], Karger [6] によって開発されている．また，それ以前から様々な付加情報を利用したモンテカルロ法などが開発されていた．

**BDD を用いた厳密解法** 一方，関根，今井 [8] は，BDD を援用したネットワーク信頼度の厳密求解法を提案している．これは，展開法による厳密解法で，信頼度関数が同じマイナーが繰り返し現れることに着目し，それらのマイナーを同定して計算過程の中で1つにまとめるというものである．もともとは，関根ら [9] によって提案されているアプローチに基づくもので，VLSI CAD の論理設計などで注目されている2分決定グラフ (Binary Decision Diagram; BDD と略す) [2] をグラフなどの組合せ論に適用し，その際，単に既存の BDD アルゴリズムを用いるのでなく，トップダウン解法というこの場合に有効な手法を開発し，BDD のサイズ解析など通例理論的解析が難しかったものを新手法で解析したものである．このアルゴリズムの計算量は，そのグラフがよい消去点順をもつかどうかという性質に依存して述べられており，特にグラフのクラスとして分離定理が成り立つ場合，よい結果が得られている．例えば，$n$ 点平面グラフに対して，$O(2^{O(\sqrt{n})})$ 時間アルゴリズムが構成できる．これにより，単純な展開法では解けなかったサイズ (たとえば 15 点弱までの密なグラフや $12\times 12$ 点くらいまでの格子グラフ) の問題が解けるようになっている．また，完全グラフの信頼度が対称性を多項式時間で計算できることも示している．

## 3 ネットワーク信頼度

点集合 $V$, 枝集合 $E$ のグラフ $G=(V,E)$ に対して，枝消滅確率が同一の値 $p$ の場合の全端子間信頼度 $R(G;p)$ は，各枝が確率 $p$ で独立に消滅するとき，残った部分グラフが連結である確率と定義される．式で表すと，

$$R(G;p)=\sum_{A}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{|A|}p^{|E-A|}$$

となる．ここで，和はすべての全域部分グラフの枝集合 $A\subseteq E$ についてとっている．各枝 $e$ の消滅確率 $p(e)$ が同一でない場合も考えられる．その一般の場合で，信頼度については次の削除縮約展開式が成り立つ．

$$R(G)=\begin{cases}(1-p(e))R(G/e) & (e\text{: 橋})\\ R(G\backslash e) & (e\text{: 自己閉路})\\ p(e)R(G\backslash e)+(1-p(e))R(G/e) & \text{他}\end{cases}$$

ここで，$\backslash$ は枝の削除を，/は枝の縮約を意味し，橋とはその枝を除くとグラフのランクが1減るものである．

関根，今井 [8] は，BDD を援用したネットワーク信頼度の厳密求解法を提案している．これは，展開法による厳密解法で，信頼度関数が同じマイナーが繰り返し現れることに着目し，それらのマイナーを同一化して計算過程の中で1つにまとめるというものである．この手法は，特に小さな分離集合をもつグラフのクラスに対して効率がよい．

$n$ 点の完全グラフ $K_n$ で枝消滅確率が全て同一の場合は，全端子間信頼度を多項式時間で求めることができる [8].

## 4 実験結果

**完全グラフの全端子間信頼度の多項式時間計算** まず，上述の完全グラフの場合について，多項式時間アルゴリズムを $n=50$ 点までの完全グラフに適用し，その信頼度関数のグラフを図1に示す．50 点と小規模に見えるが，完全グラフであるので 50 点の場合で $\binom{50}{2}=1225$ 本の枝がある．

### 4.1 一般の場合の実験グラフ

以下では，一般の場合について，上述の関根らのアプローチで分離集合などよい性質がある典型例である $k\times k$ 格子グラフと，Karger, Tai [7] によって実験に用いられているグラフ例の Delaunay 3角形分割と近接グラフの例を示す．

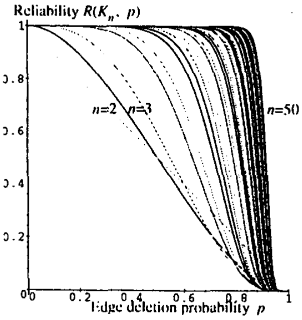



図 1: 完全グラフ $K_n$の信頼度 ($n=2,\ldots,50$)

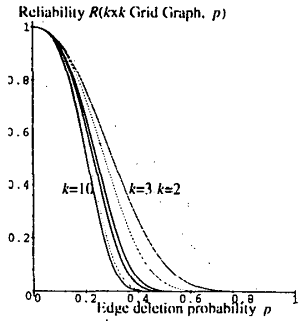
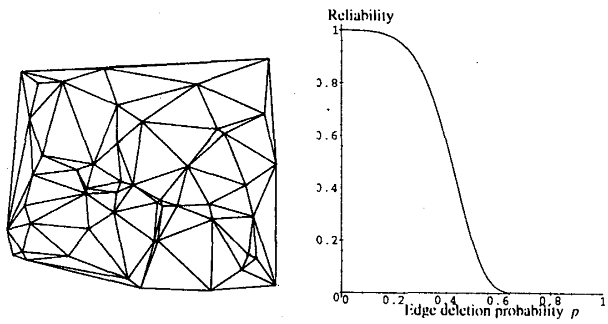



図 2: 格子グラフ $G_{k,k}$の信頼度 ($k=2,\ldots,10$)

**格子グラフ**　$k\times k$格子グラフ $G_{k,k}$の信頼度計算結果のグラフを図2に示す．このように，点数で 100 弱，枝数で 200 弱のグラフの信頼度を正確に計算することができる．

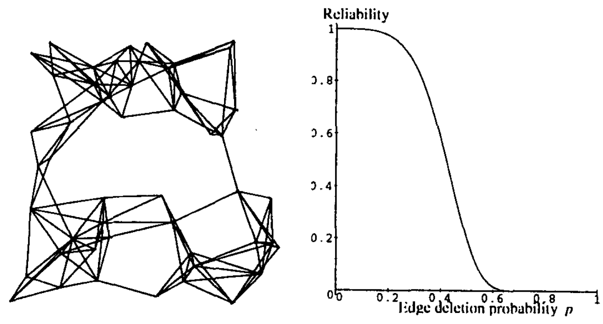
**Delaunay 3 角形分割**　Delaunay 3 角形分割は，計算幾何で代表的な構造であり，幾何的な近さを素直に実現したグラフである．ここでは，正方形内に 50 点が一様分布した例を図3に示す．BDD アプローチでの枝順は，点を $x$ 座標順に並べ，それから枝順を決定している．




(a)　(b)

図 3: (a) 50 点の Delaunay 3 角形分割, (b) 信頼度

**近接グラフ**　近接グラフも通信ネットワークを模したものとして使われている．ここでは，正方形内に一様分布する 50 点に対し，各点に対して 8 番目までの近接点を求めて，その中の 4 点をランダムに選んで枝で結ぶ．ただし，これだけでは並列枝が生じうるが，この実験ではそれを 1 つの枝としている．BDD アプローチでの枝順は，上と同じく点を $x$ 座標順に並べ，それから枝順を決定している．




(a)　(b)

図 4: (a) 50 点の近接グラフ, (b) 信頼度

**信頼度多項式の低次項計数の厳密計算**　信頼度多項式の次数 $c$ までの項の係数を求めるアルゴリズムを，BDD 構成アルゴリズムで枝数の削除が $c$ より多くなった点を単に除去することで実現できる．これにより計算できる 100 から 200 点の近接グラフの場合の BDD の大きさの計算結果を表1に示す．この実験では，BDD の幅が $10^6$ を超えない範囲で計算する環境とした．以上の実験には全て SUN Ultra1 170E (256MB メモリ) を用いた．

表 1: 近接グラフの信頼度多項式で $c$ 次の項の係数まで求めるための BDD の大きさ ($n$: 点数, $m$: 枝数, N.A.: 適用不可)

| $n$ | $m$ | $c=9$ BDD 幅 | $c=10$ BDD 幅 | $c=11$ BDD 幅 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 296 | 206338 | 349704 | 547117 |
| 120 | 353 | 61233 | 119320 | 220082 |
| 140 | 419 | 232779 | 471482 | N.A. |
| 160 | 472 | 218435 | 471819 | N.A. |
| 180 | 525 | 475947 | N.A. | N.A. |
| 200 | 581 | 367653 | 857818 | N.A. |

**謝辞**　本研究の一部は，文部省科学研究費の援助を受けた．

## 参考文献

[1] N. Alon, A. Frieze and D. Welsh: Polynomial Time Randomised Schemes for the Tutte Polynomial of Dense Graphs. *Proceedings of the 35th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1994, pp.24 35.

[2] R. E. Bryant: Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, Vol.C-35, 1986, pp.677-691.

[3] C. J. Colbourn: *The Combinatorics of Network Reliability*. Oxford University Press, 1987.

[4] D. D. Harms, M. Kraetzl, C. J. Colbourn and J. S. Devitt: *Network Reliability: Experiments with a Symbolic Algebra Environment*. CRC Press, Inc., 1995.

[5] H. Imai, K. Sekine and K. Imai: Network Reliability Computation　Theory and Practice, submitted for publication.

[6] D. R. Karger: A Randomized Fully Polynomial Time Approximation Scheme for the All Terminal Network Reliability Problem. *Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1995, pp.11 17.

[7] D. Karger and R. P. Tai: Implementing a Fully Polynomial Time Approximation Scheme for All Terminal Network Reliability. *Proceedings of the SIAM-ACM Symposium on Discrete Algorithms*, 1997.

[8] K. Sekine and H. Imai: A Unified Approach via BDD to the Network Reliability and Path Numbers. *Technical Report 95-09*, Department of Information Science, University of Tokyo, 1995.

[9] K. Sekine, H. Imai and S. Tani: Computing the Tutte Polynomial of a Graph of Moderate Size. *Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'95)*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.1004, 1995, pp.224 233.

[10] D. R. Shier: *Network Reliability and Algebraic Structures*. Oxford University Press, 1991.

[11] L. G. Valiant: The Complexity of Enumeration and Reliability Problems. *SIAM Journal on Computing*, Vol.8, No.3 (1979), pp.410 421.

[12] D. J. A. Welsh: *Complexity: Knots, Colourings and Counting*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol.186, Cambridge University Press, 1993.