1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

マルコフ的間欠使用環境下での最適予防保全戦略 II
—年齢修理問題の場合—

土肥正[†], 海生　直人[*], 尾崎俊治[†]
† 広島大学工学部, ＊広島修道大学経済科学部

1. はじめに

運用中のシステムの信頼性ならびにコスト有効性を向上させるために，効率的な予防保全スケジュールを実施することは重要である．代表的な予防保全戦略として，年齢取替方策，ブロック取替方策，点検方策などが考えられており，様々なシステムの使用環境に応じたモデル化が行われている (例えば [1])．本稿では，前報 [2] に引き続き，システムの使用環境が間欠的かつマルコフ的に推移する場合の確率的予防保全戦略の近似解法について議論する．間欠的にシステムが使用される場合の予防保全モデルとして Osaki [3], Mine *et al.* [4] があるが，ここではユーザのシステムへのアクセスと使用時間が $M/M/1$ 型待ち行列過程を形成する場合について考察を行う．

前報 [2] ではブロック修理問題を取り上げたが，本稿では年齢修理問題について議論する．システムの使用中に故障が発生すると修理によってのみ復旧できるものとし，確率的もしくは定期的に予防修理を実施するものとする．まず最初に，単位稼働時間当りの期待費用を最小にする最適保全戦略が存在するための条件について述べ，次に保全スケジュールを生成するための手続きを提案する．

2. 年齢修理問題

確率的に年齢修理を行う保全モデルについて考える．予防修理を行う時刻 S は確率分布関数 $A(x) = \Pr\{S \le x\}$, 平均 T をもつ非負の確率変数である．予防保全時刻 S までにシステム故障が生じると直ちに事後修理が開始され，修理完了後新品同様となる．いま，確率過程 $\{X(t), t \ge 0\}$ をシステムの累積使用時間とすれば，事後修理に要する修理時間は年齢 $X(t) = x$ に依存する非負の確率変数 V_x によって表わされ，その確率分布関数を $B_x(y) = \Pr\{V_x \le y\}$ とする．更に，予防修理に要する時間 W もまた非負の確率変数であり，その期待値を $E[W]$ とする．

時刻 $t = 0$ で稼働を開始したシステムが最初の予防修理を開始するかもしくは故障による事後修理を完了するまでの時間をシステム実行時間と呼び，S_{eff} のように表記する．システム故障の発生時刻 X は一般分布 $G(x)$ に従うものとすると，平均システム実行時間は

$$\mathrm{E}[S_{\mathrm{eff}}] = H_1 + H_2 \tag{1}$$

となる．ここで，

$$H_1 = \int_0^\infty \overline{G}(x)\overline{A}(x)dx, \tag{2}$$

$$H_2 = \int_0^\infty \mathrm{E}[V_x]\overline{A}(x)dG(x). \tag{3}$$

システムは以下の 3 つの状態のいずれかをとる (図 1 を参照)．

状態 0 : 予防修理中,

状態 1 : システムの使用中,

状態 2 : 故障における事後修理中.

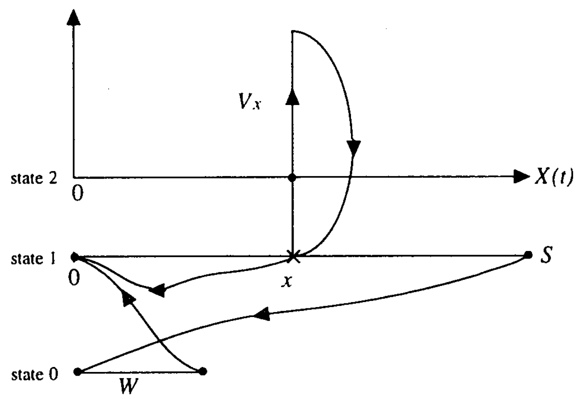

図 1: Possible realization of the stochastic system.

定理 1: 各状態 $i\,(=0,1,2)$ への遷移規則はマルコフ性を有し，その定常推移確率は以下のようになる．

$$\Pi_0 = \frac{H_0}{H_0 + H_1 + H_2}, \tag{4}$$

$$\Pi_1 = \frac{H_1}{H_0 + H_1 + H_2}, \tag{5}$$

$$\Pi_2 = \frac{H_2}{H_0 + H_1 + H_2}. \tag{6}$$

ここで，

$$H_0 = \mathrm{E}[W]\int_0^\infty A(x)dG(x). \tag{7}$$

予防修理及び事後修理に要する費用は以下の通りである．

c_1 (> 0)：事後修理に要する単位時間当りの費用，

c_2 (> 0)：予防修理に要する単位時間当りの費用．

これより，確率的戦略 $\pi(\in S)$ の下での単位稼働時間当りの期待費用 $C(\pi)$ は，

$$\begin{aligned} C(\pi) &= \frac{\mathrm{E}[\text{total cost on }(0,t]]}{t} \\ &= \frac{c_1\mathrm{E}[V_X I_{\{X\le S\}}]+c_2\mathrm{E}[WI_{\{X>S\}}]}{\mathrm{E}[\min(S,X)]} \\ &= \frac{c_1H_2+c_2H_0}{H_0} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここで，$I_{\{\cdot\}}$ は指標関数である．

いま，π の部分集合として次のような戦略 π_0;

$$U(t-T)=\begin{cases}1, & t\ge T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{9}$$

を考える．ここで，$U(\cdot)$ は通常のユニット関数である．

定理 2: 期待費用の下限は次のようになる．

$$C(\pi)\ge C(\pi_0)=C(T). \tag{10}$$

ここで，

$$\begin{aligned} C(T) &= -\frac{\int_T^\infty\{c_1\mathrm{E}[V_x]-c_2\mathrm{E}[W]\}dG(x)}{\int_0^T\overline{G}(x)dx} \\ &\quad +\frac{c_1\int_0^\infty \mathrm{E}[V_x]dG(x)}{\int_0^T\overline{G}(x)dx} \\ &\equiv A(T)/B(T). \end{aligned} \tag{11}$$

よって，あらゆる確率的戦略 π の中で π_0 が最適となり，一定の周期 T によって予防修理を行う戦略に帰着される．これより問題は

$$\min_{0\le T<\infty} C(T) \tag{12}$$

となる．

定理 3: (i) $\mathrm{E}[V_x]$ は x の増加関数，(ii) $G(x)$ は狭義 IFR，(iii) $c_1\mathrm{E}[V_T]>c_2\mathrm{E}[W]$ for $\forall T$ の下で，もし $q(\infty)>0$ ならば，方程式 $q(T^*)=0$ を満たす有限で唯一の最適予防保全時刻 T^* $(0<T^*<\infty)$ が存在し，そのときの期待費用は

$$C(T^*)=\{c_1\mathrm{E}[V_{T^*}]-c_2\mathrm{E}[W]\}r(T^*) \tag{13}$$

となる．そうでなければ，$C(T)$ は単調減少関数となり最適予防保全時刻は $T^*\to\infty$ となる．ここで，

$$\begin{aligned} q(T) &= \{c_1\mathrm{E}[V_T]-c_2\mathrm{E}[W]\}r(T)B(T) \\ &\quad -A(T). \end{aligned} \tag{14}$$

3. マルコフ的使用環境のモデル化

文献 [5, 6] に従って，期待修理時間 $\mathrm{E}[V_x]$ はシステムの年齢 x の線形関数であると仮定する．すなわち，

$$\mathrm{E}[V_x]=\alpha x+\beta. \tag{15}$$

ここで，α と β は非負の定数とする．次に，修理時間の可変部分 α を，システムを使用するユーザの使用状況を考慮することによって再評価することを考える．

定理 4: システムにアクセスする時間間隔がパラメータ γ (> 0) のポアソン過程に従い，処理時間は独立で同一なパラメータ μ (> 0) を持つ指数分布に従うとする．このとき，システムが正常に動作している（状態 1 の）ときにアクセスが発生しない確率は

$$p^*=1-\frac{\rho}{\Pi_1(T)} \tag{16}$$

となる．ここで ρ はトラフィック強度で

$$\rho=\frac{\gamma}{\mu}. \tag{17}$$

もし式 (16) で与えられる α が時間と独立ならば，定理 3 によって最適年齢修理時刻を求めればよい．これに対して以降では，l (> 0) を故障後の修理に要する実質的なサービス時間の割合（既知）とし，

$$\alpha\cong l(1-p^*) \tag{18}$$

と近似することを考える．これより，式 (8) で与えられる期待費用を近似的に評価することが可能となる．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons Inc., New York (1965).

[2] 土肥正, 海生直人, 尾崎俊治, “マルコフ的間欠使用環境下での最適予防保全戦略 I - ブロック修理問題の場合 -”, 日本オペレーションズ·リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 114 − 115 (April 2-3, 1997).

[3] S. Osaki, “An intermittently used system with preventive maintenance”, *JORSJ*, **12**, 127-188 (1970).

[4] H. Mine, H. Kawai and Y. Fukushima, “Preventive replacement of an intermittently used system”, *IEEE Trans. Reliab.*, **R-30**, 391-392 (1981).

[5] E. Gelenbe, “On the optimum checkpoint interval”, *J. ACM*, **26**, 259-270 (1979).

[6] P. B. Goes and U. Sumita, “Stochastic models for performance analysis of database recovery control”, *IEEE Trans. Computers*, **C-44**, 561-576 (1995).