1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

複数の端末を持つサーバーの最適保全政策

01107945 *小柳 淳二 (KOYANAGI Junji) 鳥取大学工学部
01103205 河合 一 (KAWAI Hajime) 鳥取大学工学部

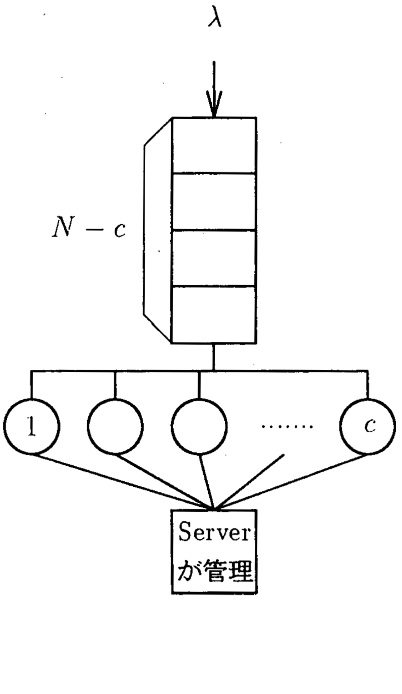
1 はじめに

ワークステーションなどは複数の端末からアクセスされ，1つのワークステーションのダウンが複数の端末の使用不可を意味することもある．本研究ではこのようなシステムに対し，保全や故障によって生じる利用者の損失を最小にするような保全政策について考察する．

2 モデル

一つのサーバーが c 個の端末によって利用されシステム全体の容量が $N(\geq c)$ のシステムを考える．サーバーは $s+2$ 個の状態 $0,\ldots,s+1$ を持ち，状態0は新品同様の状態を表し，$1,\ldots,s$ は劣化状態，$s+1$ は故障状態（c 個の端末全てが使用不能）を示すものとする．サーバーの状態が k で，使用されている端末が i 個の時，客が一人減る推移率は $\mu(i,k)$ とする．客の到着は到着率 λ のポアソン過程とし，サーバーの状態 k から l への状態推移は推移率 β_{kl} のマルコフ過程に従うとする．

本研究で扱うシステム



サーバーが $s+1$ に推移した時には，システム内にいた客全てが失われ，システムを修理するのに分布関数 $H_2(x)$ に従う時間がかかり，その間に到着する客も失われる．故障状態に推移する前に，保全を行った時には，保全修理開始時にシステム内にいる客は失われ，システムを保全するのに分布関数 $H_1(x)$ に従う時間がかかり，その間に到着する客も失われる．いずれの場合にもシステムは新品状態（状態0）に戻り，システム内客数0の状態から再稼動する．

システムの保全や修理に伴い失われる客の総期待割引人数（割引因子 α）を最小化するように各時点で保全を行うかどうかを考える．

条件として以下の3つを考える．

条件 1 任意の j に対し $\sum_{l=j}^{s+1}\beta_{kl} \uparrow k$

条件 2 すべての x に対し $\overline{H}_2(x) \geq \overline{H}_1(x)$
$(\overline{F}(x)=1-F(x))$.

条件 3 $\mu(i,k)$ は k に関して減少し i に関して増加する．

条件1は劣化の進行に伴い劣化の速度が上がることを示す．条件2は事後修理にかかる時間は予防修理に要する時間より確率的に大きいことを表す．条件3は劣化の程度が大きいほどサービス率が低下し，利用されている端末が多いほど処理の効率が上がることを示す．以下の記号を定義する．

$$h_i = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\overline{H}_i(x)dx \quad (i=1,2)$$

$$\mu = \max_{i,k}\ \mu(i,k) = \mu(c,0)$$

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{s+1}\sum_{l=0}^{s+1}\beta_{kl}, \quad \Lambda = \lambda+\mu+\Gamma+\alpha,$$

$$\gamma_{kl} = \begin{cases} \Gamma - \sum_{m=0}^{s+1}\beta_{km} & (k=l) \\ \beta_{kl} & (k\neq l) \end{cases},$$

条件1. より以下の補題が成立する．(Stoyan [1])

補題 1

増加列 a_l に対し, $\sum_{l=0}^{s+1} \gamma_{kl} a_l$ は k に関して増加する.

また条件 2. より $h_2 \geq h_1$ である.

3　マルコフ決定過程による定式化

状態 (i,k) に対し

$V(i,k)$: 状態 (i,k) からの最適コスト,

$W(i,k)$: 状態 (i,k) で稼働を続けることを選択した時点からの最適コスト,

$A(i)$: 状態 (i,k) で予防修理を選択した時点からの最適コスト

を定義する.

これらを用いて次の最適性方程式を得る.

$$W(i,k) = \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=k}^{s+1} \gamma_{kl} V(i,l) + \lambda V(i+1,k)$$

$$+ \mu(i,k)V(i-1,k) + (\mu - \mu(i,k))V(i,k)\Big]$$

$$(0 \leq k \leq N), \text{（ただし } V(-1,k) \equiv V(0,k),$$

$$V(N+1,k) \equiv V(N,k) + 1 \text{ とする.）}$$

$$V(i,k) = \min[A(i),\ W(i,k)] \quad (0 \leq k \leq s),$$

$$A(i) = i + \lambda h_1 + (1 - \alpha h_1)V(0,0),$$

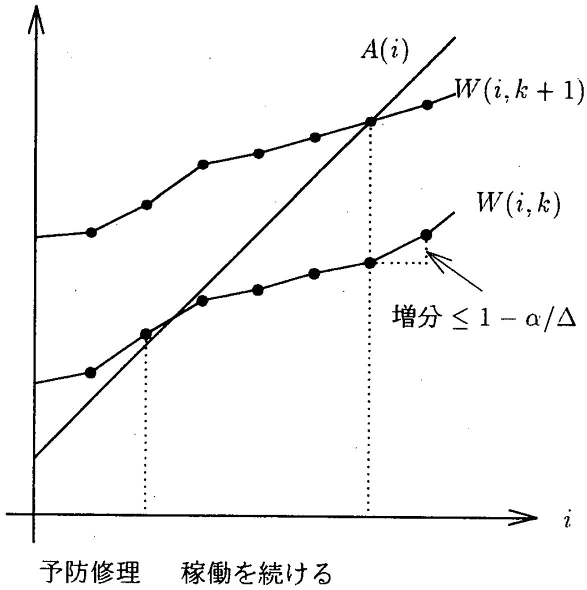
$$V(i,s+1) = i + \lambda h_2 + (1 - \alpha h_2)V(0,0).$$

このとき, 以下の性質を証明することができる.

補題 2

- $V(i,k)$ と $W(i,k)$ は i,k について単調増加,
- $W(i+1,k) - W(i,k) \leq 1 - \alpha/\Delta$,
- $V(i+1,k) - V(i,k) \leq 1$. □

これらの補題を図示すると以下のようになる.

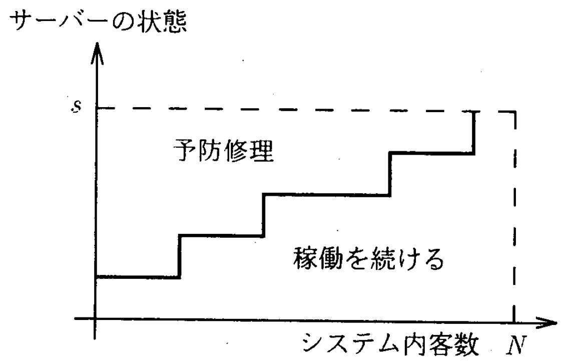


これらの補題から最適政策の構造について以下の定理を得る.

定理 1

状態 (j,k) で予防保全が最適ならば 状態 (i,l)
$(i \leq j,\ l \geq k)$ においても予防保全が最適である. □

最適政策の構造



参考文献

[1] Stoyan D., *Comparison methods for queues and other stochastic models*, John Wiley & Sons, 1983.

[2] 小柳淳二, 河合　一, サービス率が減少する待ち行列システムの最適保全政策, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1994.