1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# 交通機関の利用待ち時間モデル

02601310 東京大学 三浦英俊 Hidetoshi Miura

## 1 はじめに

現代の大都市における交通問題は，よく知られているように，都心部ほど渋滞・混雑が深刻である．これは，鉄道や道路などの交通施設の不足によって，交通量が増加するほど混雑がひどくなると考えられているわけだが，施設の不足とそれに伴う混雑・渋滞を生む原因は何であろうか？ 本研究では，移動者が交通機関を利用するときの「待つ」という行為をモデル化し，交通量と待ち時間の関係について議論する．

## 2 2種類の交通機関を持つ都市モデル

図1のような，横 $a$，縦 $b$ の矩形領域があり，ここに領域内全域どこでも利用できる低速の交通機関と，$y$ 軸上の高速交通機関の2種類が用意されているものとする．このとき，原点Oを目的地とする移動者が，単位面積，単位時間当たり一様ランダムに密度 $\rho$ で発生すると仮定する．彼らが高速交通機関利用時に要求される待ち時間の期待値を求めることが本論文の問題である．移動者の移動方法は，はじめに低速交通機関を用いて $x$ 軸方向に移動して高速交通機関に到達し，その後高速交通機関を利用して原点Oまで移動するものとする．高速交通機関は，一定時間間隔 $t_0$ で定員1人の車両が原点Oに向かって走行するものである．移動者は空の車両であれば乗車できるが，満車ならば空車が来るまで待つ．乗車後はそのまま原点Oまで移動できる．このとき乗車までに必要とする時間を待ち時間とする．このとき通過する車両が全て満車であることがないと仮定する．

## 3 車両待ち時間導出の定式化

移動者の高速交通機関上の到着位置を $(0, Y)$ と置き，乗車可能な空の車両が来るまでの待ち時間を $W$ と置く．そのうち，移動者が高速交通機関上に到達してから最初の車両が来るまでの時間を $W_1$ として，その後，最初の空の車両が来るまでの待ち時間を $W_2$ とすると，これらは互いに独立であるから，求めるべき待ち時間 $W$ の期待値は $E(W) = E(W_1) + E(W_2)$ となる．図2は，横軸に時刻 $t$, 縦軸に $y$ をとって，移動者の到着位置と時刻をプロットし，車両の移動を点線で表わしたものである．この図において，各移動者の横線の長さが待ち時間 $W$ に相当し，そのうち最初の点線までの長さが $W_1$，残りが $W_2$ を表わしている．例えば，図の移動者 A,B,E は最初に来る車両に乗車可能であるので $W_2 = 0$ であるが，Cは最初に来た車両が既にBに利用されているので $W_2 = t_0$ である．同様にDは $W_1$ に加えて $W_2 = 2t_0$ の待ち時間を必要とし，原点Oに到着する順番は E, B, C, D, A となる．移動者が平面上で一様ランダムに発生するという仮定から，期待値 $E(W_1)$ は簡単に求められて，$E(W_1) = t_0/2$ である．次に，$W_2$ の期待値 $E(W_2)$ を求める．地点 $(0, Y)$ を通過する車両は単位時間当たり $1/t_0$ 台，一方この時間内に高速交通機関を利用して位置 $Y$ を通過する移動者数の密度は $\rho a(b-Y)$ であるから，最初に通過する車両が空である確率，すなわち $W_2 = 0$ となる確率を $p_0$ と置くと，

$$p_0 = 1 - \rho a(b-Y)t_0 \tag{1}$$

と表わされ，確率 $p_0$ で最初に来た車両に乗ることができる．これを用いると，導出過程は省略するが，地点 $(0, Y)$ を満車車両が $n$ 台連続して通過する確率を $\phi(n)$，$\phi(n)$ に関する $n$ の $i$ 次のモーメントを $\nu_i$ とすると，

$$E(W_2) = (1-p_0)t_0\left(\frac{\nu_2+\nu_1}{2\nu_1}\right) \tag{2}$$

と書ける．

## 4 連続満車台数確率の導出

図3のように，ある時刻以降に $(0, Y)$ を通過する車両を順番に $c_0, c_1, c_2, \ldots$ と呼ぶことにし，さらに車両 $c_1$ は必ず満車の車両の列の先頭であると仮定する．このとき $c_1$ から $c_n$ までが全て満車で $c_{n+1}$ が空車となる確率が $\phi(n)$ に相当する．図3の $ty$ 平面において車両 $c_{i-1}$ と $c_i$ を表わ

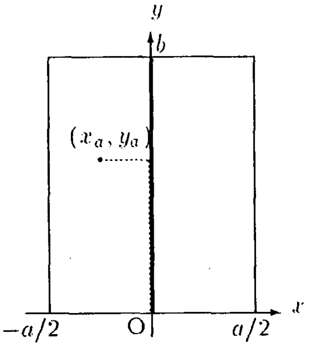


図 1: 高速交通機関を持つ矩形都市モデル

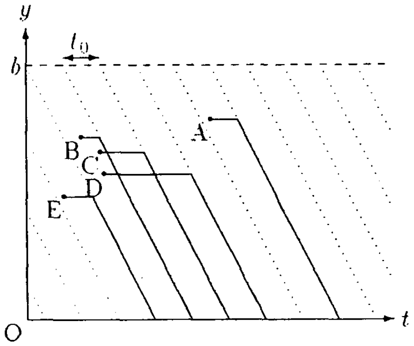


図 2: 移動者の待ち時間の例

す直線と直線 $y=b$, $y=Y$ に囲まれた平行四辺形領域を $\tau_i$ と呼び，内部で発生する移動者数を $h_i$ とする．対象領域内で一様ランダムに移動者が発生するという仮定から，$ty$ 平面上の移動者の点の分布はポアソン分布に従い，その密度は $\rho a$ である．よって，任意の $\tau_i$ 内に $h_i$ 人の移動者が到着する確率を $G(h_i)$ と置くと，

$$G(h_i)=\frac{\lambda^{h_i}}{h_i!}e^{-\lambda},(\lambda=\rho a(b-Y)t_0) \qquad (3)$$

と表わされる．ここで

$$\begin{aligned} H_n &= \{\{h_1,\ldots,h_n\}|c_1,\ldots,c_n\text{が満車},c_{n+1}\text{が空車}\}, \\ S_n &= \sum_{\{h_1,\ldots,h_n\}\in H_n}\frac{1}{h_1!\cdots h_n!} \end{aligned}$$

とすると，詳細は省略するが，求めるべき確率 $\phi(n)$ は

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \frac{\sum_{\{h_1,\ldots,h_n\}\in H_n} G(h_1)\cdots G(h_n)G(0)}{1-G(0)} \\ &= S_n\frac{\lambda^n e^{-(n+1)\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \qquad (4) \end{aligned}$$

と表わされる．ただし，係数 $S_n$ は

$$\begin{aligned} I_{n,i} &= \{\{h_1,\ldots,h_n\}|\{h_1,\ldots,h_n\}\in H_n, h_n=i\}, \\ s_{n,i} &= \sum_{\{h_1,\ldots,h_n\}\in I_{n,i}}\frac{1}{h_1!\cdots h_n!} \end{aligned}$$

と置いて，

$$\begin{aligned} S_n &= s_{n,1}+\cdots+s_{n,n}, \\ s_{n,1} &= \frac{1}{n!}, \\ s_{n,i} &= \sum_{j=i-1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{s_{j,k}}{n-j},\ (i=2,\ldots,n) \end{aligned}$$

と書ける．以上のように，$\phi(n)$ を求めるのは容易ではないのだが，ともかく $S_n$ を用いてモーメント $\nu_1, \nu_2$ を計算することができる．ただし，各 $S_n$ は前に示した漸化式を用いて求めるので，厳密な値を求めるのは困難である．

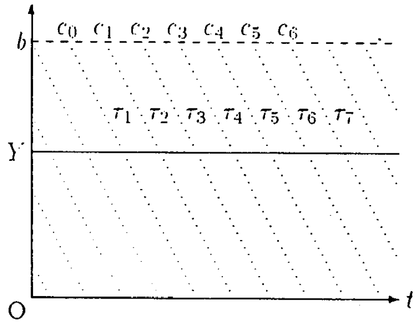


図 3: 位置 $Y$ を通過する車両 $c_0, c_1, c_2, \ldots$

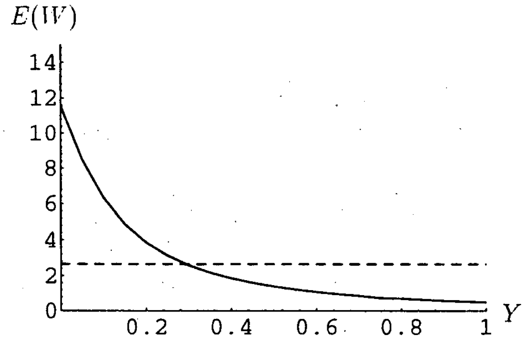


図 4: 移動者の待ち時間 $E(W)$

そこで，

$$\sum_{n=1}^{N}\phi(n)>0.99$$

を満たす十分大きな定数 $N$ に対して，$\phi(1),\ldots,\phi(N)$ を求め，$\nu_i$ の近似値 $\nu_i'$ を

$$\nu_i'=\sum_{n=1}^{N}n^i\phi(n)+(N+1)^i\left(1-\sum_{n=1}^{N}\phi(n)\right) \qquad (5)$$

と定義してこれから用いていくことにする．

例えば，$a=b=1$，$t_0=1$，$\rho=0.8$，$N=100$ としたときの $\nu_1', \nu_2'$ から $E(W)$ を都心から距離 0.05 間隔で計算し，各点を線分で結んだ折線 $l_a$ を図 4に示す．また，この時の待ち時間の平均値約 2.6 を破線で示す．このとき，$y=0$ のときの $p_0$ は 0.2，すなわち通過する車両のうち 20% が空車であり，この位置で空車の到着を待つならば，平均で約 12 台の車両通過を見送る必要があることがわかった．しかしここで強調しておきたいことは，約 12 台の車両通過を見送る必要があるというような，数値そのものではなく，高速交通機関上の交通量が $Y$ に比例して減少する一方で，$E(W)$ の減少率は $Y$ が大きくなるにつれて小さくなるという結果である．このことから，交通量と待ち時間は必ずしも比例しないことが明らかになった．

## 5 おわりに

交通施設と混雑に関する研究は，数多くの既存研究の蓄積があるが，それらは渋滞の現象のモデル化を目的とするもの，あるいはネットワークフロー問題として議論したものが多いようである．しかし，現実には交通機関の需要とサービスは「にわとりと卵」の関係にあるから，現状の需要量から必要なサービス量を議論することは，かなり難しいことだと思われる．この困難を回避しながら適正な交通サービス量を議論するために，一様な交通需要に対する交通機関の待ち時間モデルを作成して，待ち時間の性質を議論した．

## 参考文献


[1] 依田 浩 (他)(1977) 応用確率論，朝倉書店．