1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

並列待ち行列 $PH/PH, PH/2$ の定常分布の漸近性

02202490 東京工業大学 ＊代田 将也 SHIROTA Masaya
01506790 東京工業大学 藤本 衡 FUJIMOTO Kou
01302440 東京工業大学 高橋 幸雄 TAKAHASHI Yukio

1 はじめに

並列待ち行列の構造は複雑で、一般的な分布を仮定した場合の定常状態確率やその性質についてはあまり解明されていない。並列待ち行列に関する解析については、今日まで主として到着時間間隔及び窓口のサービス時間が指数分布に従うようなモデルについて行われている ([1][2])。このうち、[3] では定常分布が幾何的な裾を持つことを示している。本研究では、この結果を到着時間間隔及び窓口のサービス時間が互いに異なる相型分布に従う並列待ち行列 $PH/PH, PH/2$ に拡張することを考え、その漸近的挙動を解析する。

2 並列待ち行列

本研究で扱う並列待ち行列 $PH/PH, PH/2$ は図1のように2つの待ち行列からなり、各々に1つの窓口と容量が無限大の1つの待ち室がある。客の到着時間間隔は互いに独立で相型分布 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}]$ に従う。系に到着した客は並んでいる人数（窓口の客も含む）が少ない方の待ち行列に並ぶ。もし客が到着したときに両方の待ち行列の人数が同じときは、客は確率 q_1 で待ち行列1に、確率 q_2 で待ち行列2に並ぶ $(q_1+q_2=1)$。一旦待ち行列に並ぶとサービスを受け終わるまで行列を変えることはできない。待ち行列 $k(k=1,2)$ に並んだ客は、窓口 k において相型分布 $[\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{S}_k]$ に従うサービス時間だけ先着順にサービスを受け、退去する。各窓口のサービス時間は互いに独立であり、また到着時間間隔とも独立である。

この並列待ち行列に対し、待ち行列1、2に並んでいる人数を i_1, i_2、到着過程および窓口1、2のサービス過程の状態をそれぞれ j_0, j_1, j_2 と置くと、並列待ち行列は連続時点マルコフ連鎖と見なすことができ、その状態は $(i_1, i_2, j_0, j_1, j_2)$ で表される。しかし、このような状態表現では推移速度行列の表現が複雑になってしまう。そこで、i_1, i_2 のかわりに $m=\min(i_1,i_2)$ 及び $n=i_1-i_2$ を用いて状態を (m, n, j_0, j_1, j_2) と組にして表す。この場合同一の (m,n) の状態を一つの状態のグループとしてまとめた時の推移図は図のようになる。

この時、状態を辞書順に並べると推移速度行列 $\boldsymbol{P}$ は m による分割に対して以下のようなブロック構造を持つ。

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & \\ \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

各ブロックはさらに n による分割に対して以下のようなブロック構造を持つ。

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \ddots & \overline{\boldsymbol{A}} & & & \\ \ddots & \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{A}} & & \\ \hline & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \\ \hline & & \overline{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} & \ddots \\ & & & \overline{\boldsymbol{A}} & \ddots \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{B}} & \overline{\boldsymbol{C}_2} & & & \\ \hline & & q_2\overline{\boldsymbol{A}} & \overline{\boldsymbol{B}} & q_1\overline{\boldsymbol{A}} & & \\ \hline & & & \overline{\boldsymbol{C}_1} & \overline{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{O} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{C} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \overline{\boldsymbol{C}_1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & & & \\ \hline & & \overline{\boldsymbol{C}_1} & \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{C}_2} & & \\ \hline & & & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{C}_2} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

3 擬出生死滅過程

並列待ち行列 $PH/PH, PH/2$ から導かれるマルコフ連鎖は擬出生死滅過程と呼ばれるものである。このときブロック $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ がたかだか有限次元であるようなものについては Neuts [4] などの結果が得られている。一方、ここでは $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が可算無限次元となるが、高橋ら [3] はこのような擬出生死滅過程の定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \cdots)$ の漸近的

挙動を解析している。すなわち、$-\boldsymbol{B}, -\boldsymbol{B}_0$ の対角要素が上界 $d\ (<\infty)$ を持ち、かつ、以下の条件を満たす正の定数 $\eta\ (<1)$ と正の横ベクトル $\boldsymbol{x}$、正の縦ベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在すると仮定する。

(i) $\boldsymbol{x}(\eta^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\eta\boldsymbol{C})=\boldsymbol{0}$
(ii) $(\eta^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\eta\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$
(iii) $\eta^{-1}\boldsymbol{xAy} \neq \eta\boldsymbol{xCy}$
(iv) $\boldsymbol{xe}<\infty, \quad \boldsymbol{xy}<\infty$

このとき

(a) $\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{y}<\infty$ であり、かつ
(b) 以下の行列で表されるマルコフ連鎖が既約

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & & \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

であるならば、$\boldsymbol{\pi}_m \sim c\,\eta^m\boldsymbol{x}\ (m\to\infty)$ となる。ここで "$\sim$" は両辺の比率が 1 に近づくことを表す。また c はある定数である。

4 並列待ち行列の定常分布の漸近的性質

2 節の並列待ち行列について連立方程式

$$T^*(\kappa_0)S_1^*(\kappa_1)=1, \quad T^*(\kappa_0)S_2^*(\kappa_2)=1$$
$$\kappa_0+\kappa_1+\kappa_2=0$$

を考える。ただし、$T^*(\kappa_0)$ 及び $S_k^*(\kappa_k)$ は相型分布 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}]$ 及び $[\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{S}_k]$ のラプラス変換である。このとき、解 $\boldsymbol{\kappa}_0=\boldsymbol{\omega}_0$ に対して $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{\omega}_0))^2$ とする。また、$\boldsymbol{y}$ については、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (\cdots, \boldsymbol{y}_{-2}, \boldsymbol{y}_{-1}, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots)^T \\ \boldsymbol{y}_k &= \eta^{-\frac{|k|}{2}}\cdot\boldsymbol{v}_0\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_{rm1}, \boldsymbol{v}2$ はこれらの相型分布から導かれる正の縦ベクトルである。この η,$\boldsymbol{y}$ は条件の (ii) を満たすことが証明できる。また、η, 及び $\boldsymbol{y}$ を用いて、条件 (i)(iii)(iv) を満たす $\boldsymbol{x}$ の存在を証明できる。条件 (b) は並列待ち行列の仮定から明らかに成り立つ。以上のことから、次の定理が導かれる。

定理

$\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{y}<\infty$ が成り立つならば、$\pi(m,n,j_0,j_1,j_2)$ を状態 (m,n,j_0,j_1,j_2) に対する定常状態確率とすると、$m\to\infty$ のとき

$$\pi(m,n,j_0,j_1,j_2) \sim Gc(n,j_0,j_1,j_2)\eta^m$$

という形で表すことができる。$G, c(n,j_0,j_1,j_2), \eta$ はいずれも m と独立な定数である。

なお、$\boldsymbol{x}$ の形は陽に表すことができないが、$\boldsymbol{x}$ の裾が幾何的な裾を持つことは証明の過程で示される。また、(a) が成り立つことは証明できていないが、様々なモデルによる数値計算の結果を吟味した結果、条件 (a) が成り立つのではないかという予測がなされた。

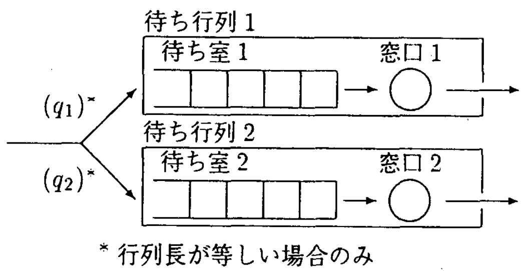

図 1: 並列待ち行列

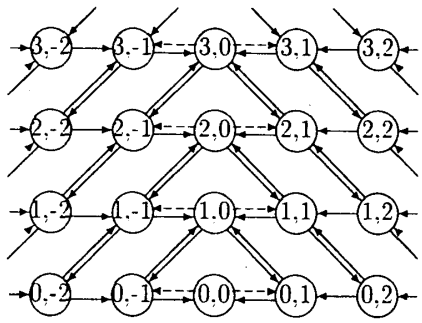

図 2: 状態グループ (m,n) 間の推移図

参考文献

[1] Frank A. Haight. Two queues in parallel. *Biometrika*,**45**: pp.401-410, 1958.

[2] J. F. C. Kingman. Two similar queues in parallel. *Ann. Math. Statist.* **32**: pp.1314-1323, 1961.

[3] Yukio Takahashi, Naoki Makimoto, and Kou Fujimoto. Asymptotic properties in quasi-birth-and-death process with a countable number of phases. Research Report on Mathematical and Computing Sciences B-321, Tokyo Institute of Technology, 1996.

[4] Marcel F. Neuts. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. The John Hopkins University Press, 1981.