1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

要員区分を考慮した学科編成法*

—その2：一般化3次元割当問題—

02401640 防衛大学校情報工学科 那須靖司† NASU Yasushi
01700900 防衛大学校情報工学科 山田武夫 YAMADA Takeo

1 はじめに

前報[1]では, 要員を決定した後の学科配分だけの問題を考えたが, 本稿では学科と要員を同時に配分する問題を議論する.

2 問題の定式化

I人の学生をJ学科, K要員に同時に配分したい. 学生iが学科j, 要員kに割り当てられたときの好ましくなさが罰金p_{ijk}として与えられたとき, 全学生の罰金の総和を最小にする問題を考える. ただし, 各学科と要員には学生定員がそれぞれb_j, c_kとして与えられ, $\sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_{k=1}^{K} c_k = I$とする. 決定変数$x_{ijk}$を,

$$x_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{学生 } i \text{ を学科 } j, \text{ 要員 } k \text{に割り当てる,} \\ 0, & \text{割り当てない,} \end{cases}$$

により定義すると, 問題は次のように定式化される.

G3DA:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} p_{ijk}x_{ijk} \qquad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = b_j, \quad \forall j \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ijk} = c_k, \quad \forall k \qquad (4)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j,k \qquad (5)$$

ここで特に$I = J = K$で, $b_j \equiv 1$, $c_k \equiv 1$とした問題は**3**次元割当問題(**3DA:** 3D assignment)と呼ばれている[2]ので, 上記の問題は一般化**3**次元割当問題(**G3DA:** generalized 3DA)と呼ぶのが適当であろう.

*OR学会秋季研究発表会(東京経済大学, 1997.9.10-11)

†E-mail: nasu@cs.nda.ac.jp

3DAが$\mathcal{NP}$困難であることは**3**次元マッチング問題(**3DM:** 3D matching)が$\mathcal{NP}$完全である[3]ことから容易に証明されるので, **G3DA**も$\mathcal{NP}$困難である.

3 近似解法

3.1 グリーディ解

最初に**G3DA**の実行可能解を次のように求める. p_{ijk}の小さい順に$\{ijk\}$を調べ, 学生iが未配分で学科k, 要員jの定員が満杯でなければ学生iを学科j, 要員kに割り当てる. これをすべての学生が割り当てられるまで反復して得られた解をグリーディ解と呼ぶ.

3.2 2-Opt 法

上で得られた初期解に次の操作を施し解を改善する. すなわち, すべての学生の対について, それら2人の(i)学科の入れ換え, (ii)要員の入れ換え, (iii)学科と要員の入れ換え, のいずれかにより現在の解よりも評価値が改善されるならば, その入れ換えを実行する. これを, 解の改善が見られなくなるまで反復する. このようにして得られる解を近似解**1**と呼び, その目的関数値を$z^{(1)}$とする.

4 連続緩和による下界値

0-1条件(5)を非負条件に置き換えた**G3DA**の連続緩和問題を**C(G3DA)**と記す. **C(G3DA)**を解く改訂単体法プログラムを作成したが, [1]と同様に制約条件の疎性の利用, 部分(巡回)プライシングの採用などによって計算時間の短縮と記憶容量の節約を図った. これは**G3DA**の下界値$\underline{z}$を与える.

予備的にいくつかの例題を解いて見たところ, 制約条件(2)-(4)はユニモジュラー性を満たさないので**C(G3DA)**の解は一般に分数成分を含むが, 実際には

その出現比率は極めて低く, 0-1 解 (すなわち **G3DA** の最適解) を得るケースも少なくないことがわかった.

そこで LP により配分が確定した学生と, その分の定員を原問題から除いて問題を縮小し, 再び第 3 節の近似解法を適用すれば, 更に良質の近似解が得られると予想される. これを近似解 **2** と呼び, その目的関数値を $\xi^{(2)}$ とする.

5 数値実験

学科数, 要員数が $J=8$, $K=5$ の場合と $J=10$, $K=4$ の場合について, 学生数 I が 100~600 の範囲で数値実験を行った. p_{ijk} は $[1,1000]$ の範囲の一様乱数により定めたが, 確率 P で無限大に置き換えることとし, $P=0.0$, 0.5 の場合を計算した. 結果を図 1~図 3 に示すが, これらはすべて 20 回の独立な試行の平均値である.

まず, 図 1 は 2 つの近似解法の計算時間で, 学生数の増加にともなって所要時間の増加する様子を示す. また, 図 2 は $(\xi^{(i)}-\underline{\xi})/\underline{\xi}\times 100(\%)$ により評価した誤差率で, ここでは $J=10$, $K=4$, $P=0.0$ の場合を示すが, $J=8$, $K=5$ や $P=0.5$ の場合もほぼ同様の傾向であり,

- 近似解 2 は計算時間はかかるが, 精度はかなり良い,
- 学生数 I が大きい程精度が良くなる,
- P による差はあまりない,

ことがわかった.

次に, 図 3 は LP により学科, 要員の配分が定まった学生の割合で, 常に 90 数% であるが, 学生数 I の増加とともにこの比率が高くなっている. また, 20 ~ 60% の確率で LP により **G3DA** の厳密解を得ることができた.

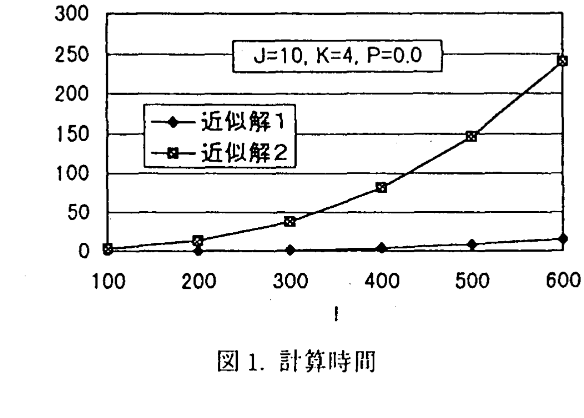

図 1. 計算時間

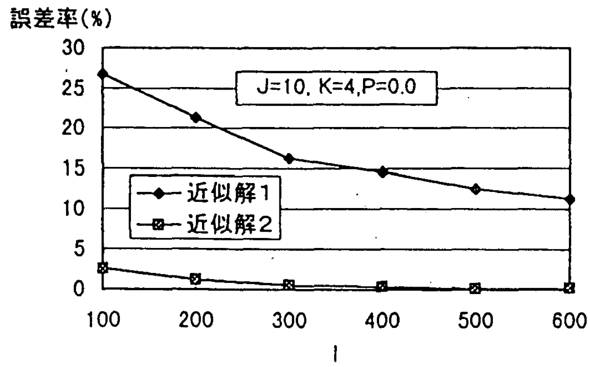

図 2. 近似解の精度

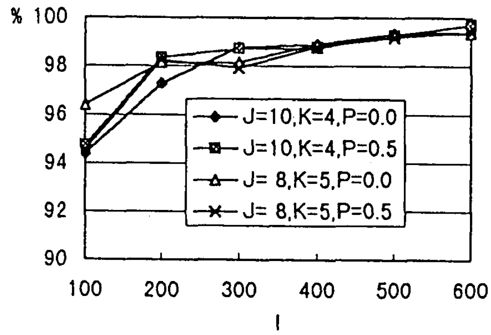

図 3. LP により配分が確定した学生の比率

6 むすび

要員を考慮した学科編成法を一般化 3 次元割当問題として定式化し, その近似解法と誤差評価法を提示した. 今後さらに効率の良い近似解法と, 分枝限定法による厳密解法の開発を試みる予定である.

参考文献

[1] 山田武夫ほか, “要員区分を考慮した学科編成法 −その 1−”, 本アブストラクト (1997.9.10-11).

[2] 今野浩ほか, 「整数計画法と組合せ最適化」, 日科技連 (1982).

[3] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computer and intractability*, W.H.Freeman and Company(1979).