On the memory - length - one rule for a secretary problem with uncertain employment

01303783 愛知大学 玉置光司 TAMAKI Mitsushi

1. はじめに

秘書問題の代表的な最適化基準は次の二つである。

（1） 成功確率最大化、 （2） 期待順位最小化

応募者数 n が大きくなると、評価値の漸近解が美しい形になる。採用の申し出に対して、応募者に拒否権が無い場合と有る場合（確率 1-p で拒否する）の（1）、（2）に対応する結果は以下のように与えられる。

（1）拒否権が無い場合 $e^{-1} \cong 0.368$ （2）拒否権が無い場合 $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \cong 3.8695$

拒否権が有る場合 $p^{1/(1-p)}$ 拒否権が有る場合 ?

2. Rubin and Samuels' problem

この論考の目的は上述？の一つの上限が$[(1+p)^{2(1+1/p)}-1]/p(1+p)$で与えられることを示すことにある（3節、モデル２で与えられる）。

これを求めるために、この節ではmemory-length-oneルールについて述べておこう。（2）の拒否権が無い場合の結果はChow et al.(1964)が求めたが、彼らの最適政策を実行するためには、出現した応募者の相対順位をいつも正確に記憶しておく必要がある（多くのmemoryが必要）。それに対して、Rubin and Samuels(1977)はmemory-length-oneの範囲で期待順位を有限にする例を与えた。memory-length-one-とは過去の応募者を（比較の対象として）一人しか記憶しておくことができない場合を意味する。したがって、この場合、現在の応募者は記憶されているものと比較して、良いか悪いかという形で評価される。毎回、３通りの決定Accept（採用する）Reject（パスする）Remember（旧い記憶をすて、現在のものを記憶する）のどれかを選択することとする。政策は選択の列$\{W_r/B_r;\ r=2,3,\ldots,n-1\}$によって記述される。ここで、$W_r$、$B_r$は r番目の応募者が、既に記憶されている者と比較して、悪い場合、良い場合に対応して選択される決定をあらわす（ただし、最初はRememberで、W_n/B_n=Accept/Accept）。W_r/B_rは本来９通りの決定が可能であるがRubin and Samuels(1977)は３通りの決定

W_r/B_r=Reject/Remember, Reject/Accept, Remember/Remember に限定して、最適政策を求め、次のような形になることを示した。

$$W_r/B_r=\begin{cases}\text{Reject/Remember} & (r<a_n)\\ \text{Reject/Accept} & (a_n\le r<r_n)\\ \text{Remember/Remember} & (r=r_n)\\ W'_{r-r_n}/B'_{r-r_n} & (r>r_n)\end{cases}$$

ここで、$\{W'_i/B'_i;\ i=1,2,\ldots,n-r_n\}$ は応募者の総数が$n-r_n+1$の場合に対応する最適政策。このことは、$n\to\infty$の時、

$$0=R_0<A_1<R_1<\ldots<A_k<R_k<\ldots<1$$

となる無限列$\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$が存在して、区間(R_{k-1}, A_k)では最良のものを記憶し、区間(A_k, R_k)では記憶されているものより良いものが出たら採用するという政策に対応し、R_k, A_kが

$$R_{k+1}=R_k+R_1(1-R_1)^k,\quad A_{k+1}=R_k+\alpha R_1(1-R_1)^k$$

となるように選ばれることを意味する。これらは２数$R_1=\beta$, αで決定されるので、この政策を(α,β) 政策と呼ぶ。上記の問題においては、最適値はβ=0.456, α=0.296で、このとき、期待順位は7.41375となる（Rubin and Samuelsは、この問題をinfinite problemとして論じた）。成功確率最大化問題は、そもそもmemory-length-oneであるから、以下では、期待順位最小化に限定する。

3. Uncertain employment

Rubin and Samuelsの問題を拒否権が有る場合に拡張する。拒否権が有る場合の(α,β)政策を次のように定義する。

時間区間$(0, A_1)$では、最初の応募者を記憶し、以後ベターな者が出現したら、順次、記憶を更新する

（したがって、区間$(0, A_1)$の最後には、それまでのベストが記憶されている）。区間(A_1, R_1)では、記憶されている者よりベターな者が出現したらオファーを与える。オファーが断わられたら、次のベターな者の出現を待って改めてオファーを与える。オファーが受け入れられたら試行終了。区間$(0, R_1)$で試行が終了しなかった場合、以降、同様のパターンを繰り返す。

Infinite problem として考える（詳しくはGianini and Samuels (1976) 参照）。政策(α, β)のもとでの、停止時刻を T 、選択したものの（絶対）順位を X とすると、

$$E[X] = E[XI_{\{T\le\beta\}}] + P[T>\beta]\frac{E[X]}{1-\beta} \qquad \text{すなはち、} \qquad E[X] = \frac{\bar{\beta}E[XI_{\{T\le\beta\}}]}{\bar{\beta}-P[T>\beta]}$$

となる。ただし、$\bar{\beta}=1-\beta$（α, pにかんしても、以後同様の記法を用いる）。

(A_1, R_1)でのオファーの与え方により、２つのモデルが考えられる。

モデル　１。　区間(A_1, R_1)でオファーが拒否されても、記憶を変更しない場合。

補題　1

$$E[X] = \frac{\bar{\alpha}p(2\alpha+\bar{\alpha}p)}{2\alpha(1-\bar{\alpha}\bar{p})^2}\frac{\bar{\beta}}{\beta\left(\bar{\beta}-\frac{\alpha}{1-\bar{\alpha}\bar{p}}\right)}$$

最適なα, βは次の関係を満足する。

$$\alpha = \frac{p\bar{\beta}^2}{1-\bar{p}\bar{\beta}^2}$$

$\bar{\beta}$は$g_1(x)=0$の根 x.　ここで、$g_1(x) = \bar{p}x^4(x^2-x-1) + px^3 + x^2 + x - 1$

モデル　2。　区間(A_1, R_1)でオファーが拒否されると、拒否した者が今までの記憶に取って変わる（したがって、いつも、それまでのベストが記憶として保存されている）。

補題　2

$$E[X] = \left(\frac{p}{1+p}\right)\frac{(\alpha^{-1}-\alpha^p)\bar{\beta}}{\beta(\bar{\beta}-\alpha^p)}$$

最適なα, βは次の関係を満足する。

$$\alpha = (\bar{\beta})^{2/p}$$

$\bar{\beta}$は次式$g_2(x)=0$の根 x.　ここで、$g_2(x) = px^{2(1+1/p)} - (1+p)x + 1$.

また、E[T]の１つの上限が次のように与えられる。

$$E[X] \le \frac{1}{p(1+p)}\left[(1+p)^{2(1+1/p)} - 1\right]$$

4.　２つのモデルの比較と数値例

下の数値例が示すように、モデル１のほうがモデル２より、良い政策となっている。

	モデル 1				モデル 2			
p	E[X]	β	α	$(1-\alpha)/\alpha$	E[X]	β	α	$-\log\alpha$
0.1	47.95	0.266	0.105	8.57	63.02	0.074	0.214	1.54
0.5	12.39	0.395	0.225	3.45	16.60	0.291	0.253	1.38
0.9	7.99	0.447	0.284	2.52	8.10	0.430	0.288	1.25

References

Chow,Y.S.,Robbins,H.,Moriguti,H.&Samuels,S.M.(1964) Optimal selection based on relative rank(the "secretary problem"), Israel J.Math. 2, 81-90.

Gianini,J.&Samuels,S.M.(1976) The infinite secretary problem, Ann. Probab. 4, 418-432.

Rubin,H&Samuels,S.M.(1977) The infinite-memory secretary problem, Ann.Probab. 5, 627-635.