1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

目的関数の係数ベクトルが凸多面体で制限された線形計画問題における達成率に基づくアプローチ

01009545　大阪大学　＊乾口雅弘　INUIGUCHI Masahiro
01307844　大阪大学　谷野哲三　TANINO Tetsuzo

1．はじめに

不明確な係数を取り扱う計画問題においては，係数の変動に対して最適値からの乖離をできるだけ小さくするロバストな解が議論されている [1-4]．とりわけ，区間計画問題においては，このような解として，最大リグレット最小解 [1,3] と最悪達成率最適解 [2] が提案され，その求解法が議論されている．本研究では，最悪達成率最適解を取り上げる．従来，不明確な係数間の独立性が仮定されてきたが，ここでは，不明確な係数間に相互関係があり，係数間の関係が凸多面体で表現される場合を考察する．最悪達成率最適化問題が定式化され，緩和法に基づいた全体的な解法が示される．さらに，この解法において解くべき部分問題の解法が議論される．この部分問題は，非凸の Stackelberg 問題となり，分枝限定法による解法が提案される．

2．目的関数の係数ベクトルが凸多面体で制限された線形計画問題

次の不明確な係数を含む線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\} \end{array} \tag{1}$$

ただし，A は $m \times n$ 行列であり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$ である．$\boldsymbol{\gamma}$ は可能性変数ベクトルで，次の有界な凸多面体 Γ に制限される．

$$\Gamma = \{\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}} \mid D\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{g}\} \tag{2}$$

D は $p \times n$ 行列であり，$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_p)^{\mathrm{T}}$ である．なお，X は有界で，任意の $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ に対し，$\max_{\boldsymbol{x} \in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ になると仮定する．

式 (1) では，目的関数の係数ベクトルが不明確で，凸多面体 Γ 内にあることだけわかっている．一般に，Γ 内のすべての係数ベクトルに対して最適となる解は存在しない．そこで，目的関数の係数ベクトルが Γ 内で変動しても最適値に近い目的関数値を与える最大リグレット最小解 [1,3] や最悪達成率最適解 [2] が考えられている．本研究では，最悪達成率最適解を取り扱う．

式 (1) のある実行可能解 $\boldsymbol{x}$ を選んだ後，目的関数の真の係数ベクトルの値 $\boldsymbol{c}$ を得たとする．このとき，$\boldsymbol{x}$ における目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の最適値に対する割合は

$$ra(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\max_{\boldsymbol{y} \in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \tag{3}$$

と与えられる．問題の仮定より，明らかに $ra(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \leq 1$ となり，$ra(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ が 1 に近いほどよい．$ra(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ は，$\boldsymbol{x}$ の最適値に対する達成率を示していると考えられる．

真の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ が未知であるとき，$\boldsymbol{x}$ を選ぶことによる最悪の達成率は，次式で与えられる．

$$Ra(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{c} \in \Gamma}\ ra(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \tag{4}$$

この最悪達成率 $Ra(\boldsymbol{x})$ の最適化問題として式 (1) を定式化すると，次のようになる．

$$\operatorname*{maximize}_{\boldsymbol{x} \in X}\ Ra(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \operatorname*{maximize}_{\boldsymbol{x} \in X}\ \min_{\boldsymbol{c} \in \Gamma} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\max_{\boldsymbol{y} \in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

式 (5) を最悪達成率最適化問題とよび，その最適解を最悪達成率最適解という．

3．緩和法に基づく解法

式 (5) は，次の緩和法に基づいた解法により，許容誤差 $\varepsilon > 0$ の最適解を求めることができる．

[アルゴリズム 1]

手順 1　適当な方法で，実行可能解 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ を求め，$k = 1$, $r^0 = 999999$（十分大きな正数）とする．

手順 2　部分問題

$$Ra(\boldsymbol{x}^0) = \min_{\boldsymbol{c} \in \Gamma} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0}{\max_{\boldsymbol{y} \in X} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

を解き，その最適解を $\boldsymbol{c}^k$, $\boldsymbol{y}^k$ とする．

手順 3　$Ra(\boldsymbol{x}^0) \geq r^0 - \varepsilon$ ならば，終了する．このとき，$\boldsymbol{x}^0$ が許容誤差 ε の最適解であり，最悪達成率は r^0 となる．

手順 4　線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & r \\ \text{sub. to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \dfrac{(\boldsymbol{c}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{c}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^j} \geq r,\ j = 1, 2, \ldots, k \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \tag{7}$$

を解き，その最適解として $(\boldsymbol{x}^0, r^0)$ を更新する．$k = k+1$ として，手順 2 へ戻る．

X は有界閉集合であるので，このアルゴリズムは，有限回の反復で終了する．

与えられた実行可能解の最悪達成率を求める手順 2 の部分問題 (6) が解ければ，他は容易に解けるので，最悪達成率最適解を求めることができる．以下では，式 (6) の解法について議論する．

4．最悪達成率の計算

式 (6) を書き換えると，次の Stackelberg 問題になる．

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{c},\,\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} \quad & \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \\
\text{sub. to} \quad & D\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{g},\ A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \ge 0 \\
& \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{z}} \ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \\
& \qquad \text{sub. to} \quad A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z} \ge 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

この Stackelberg 問題の目的関数は変数の積の項を含むため，非凸となる．

式 (8) の $\boldsymbol{y}$ が下位レベルの線形計画問題の最適解であることを示しているので，最適性条件を用いて，式 (8) を書き直すと，

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{c},\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{u}}{\text{minimize}} \quad & \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}} \\
\text{sub. to} \quad & D\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\ A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{c} \\
& A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \ge 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる．3 番目の制約条件を余裕変数 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)^{\mathrm{T}} \ge 0$ を用いて，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c}$ とし，$\boldsymbol{c}$ を $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{s}$ で置き換え，目的関数値を 1 から減じると，

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{s}}{\text{maximize}} \quad & \frac{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}} \\
\text{sub. to} \quad & DA^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - D\boldsymbol{s} \le \boldsymbol{g} \\
& A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \ge 0,\ \boldsymbol{s} \ge 0 \\
& \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる．さらに，仮定より，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} > 0$ であるので，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ の逆数を表す変数 t および，$t\boldsymbol{u}$，$t\boldsymbol{s}$ に対応する変数，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ を導入すると，

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{s}}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 \\
\text{sub. to} \quad & DA^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - D\boldsymbol{w} \le \boldsymbol{g}t \\
& A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \ge 0 \\
& \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = 1,\ \boldsymbol{w} \ge 0,\ t \ge 0 \\
& \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．式 (11) は，相補条件 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$ を取り除けば，線形計画問題となる．この線形計画問題を問題 (11') と記す．$\boldsymbol{w} \ge 0$，$\boldsymbol{y} \ge 0$ より，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$ は $w_j y_j = 0$，$j = 1, 2, \ldots, n$ を表している．これらのことより，次の分枝限定法に基づいたアルゴリズムにより，式 (11) を解くことができる．

[アルゴリズム 2]

手順 1 $\tilde{r} = -\infty$, $\mathcal{P} = \emptyset$ と初期化する．問題 (11') の最適解を $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{w}^*, t^*)$ とする．

手順 2 $(\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = 0$ ならば，終了する．このとき，$Ra(\boldsymbol{x}^0) = 1 - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{c}^k = (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{w}^*)/t^*$, $\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{y}^*$ となる．

手順 3 $w_j^* y_j^* > 0$ なる j を選ぶ．問題 (11') に $w_j = 0$ を加えた線形計画問題 (P_1) と，$y_j = 0$ を加えた線形計画問題 (P_2) を生成する．$\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{(\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2)\}$ と更新する．

手順 4 $\mathcal{P} = \emptyset$ となれば，終了する．このとき，$Ra(\boldsymbol{x}^0) = 1 - \tilde{r}$, $\boldsymbol{c}^k = (A^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{w}})/\tilde{t}$, $\boldsymbol{y}^k = \tilde{\boldsymbol{y}}$ となる．

手順 5 $\mathcal{P}$ から線形計画問題 (P) を選択し，$\mathcal{P} = \mathcal{P} - \{(\mathrm{P})\}$ と更新する．問題 (P) の最適解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{w}^*, t^*)$ を計算する．

手順 6 $(\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 \le \tilde{r}$ ならば，手順 4 へ戻る．

手順 7 $(\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* > \tilde{r}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*)$ ならば，$\tilde{r} = ((\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*)/(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*)$, $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}^*$, $\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^*$, $\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^*$, $\tilde{t} = t^*$ とおき，手順 4 へ戻る．

手順 8 $w_j^* y_j^* > 0$ となる j を選ぶ．問題 (P) に $w_j = 0$ を加えた線形計画問題 (P_1) と，$y_j = 0$ を加えた線形計画問題 (P_2) を生成する．$\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{(\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2)\}$ と更新し，手順 4 へ戻る．

なお，$((\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*)/(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* - (\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*)$ が，$1 - Ra(\boldsymbol{x}^0)$ の下界値になることが示せる．このため，手順 7 でこれを計算している．また，手順 5 で線形計画問題を解く際，再最適化手法を用いることができる．

参考文献

1. 乾口，久米：最大リグレット最小化に基づく区間目的関数をもつ線形計画問題の解の概念，日本経営工学会誌，Vol.42, No.3, 193–199 (1991).
2. 乾口，村田，坂和：区間目的関数をもつ線形計画問題における最悪達成率最適化，システム制御情報学会論文誌，Vol.6, No.1, 243–251 (1993).
3. H. E. Mausser and M. Laguna: Minimizing Maximum Absolute Regret for Linear Programs with Uncertain, Bounded Costs, working paper, Graduate School of Business, University of Colorado, Boulder, CO. (1996).
4. 乾口，坂和：ファジィ線形計画問題におけるロバストでソフトな最適化，日本ファジィ学会誌，Vol.8, No.6, 1125–1133 (1996).