1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

順序複体のシェラビリティに対する必要条件

01504250 東京理科大学工学部 平林隆一 HIRABAYASHI Ryuichi
01012660 東京理科大学工学部 池辺淑子 IKEBE Yoshiko
東京理科大学工学部 丸山絵里子 MARUYAMA Eriko

1 はじめに

有限半順序集合は，それに含まれる全順序部分集合を単体とみなすことによって，(組合せ的) 単体的複体 (順序複体) と考えることができる．順序複体がシェリング可能であると，対応するStanley-Reisner環がCohen-Macaulay環となる ([2],[3] 参照)．Björner([1]) が順序複体のシェリング可能性に対する十分条件を得ているので，本稿では，順序複体のシェリング可能性に対する必要条件について考察する．

2 半順序集合と単体的複体

定義 2.1 (単体的複体): $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を有限集合とする．V上の単体的複体Δとは，Vの部分集合の族で，

(1) $G \in \Delta$かつ$F \subset G$ならば，$F \in \Delta$,

(2) $\{v_i\} \in \Delta,\ i = 1, \ldots, n$

であるときをいう．

定義 2.2 (単体的複体の面): ΔをV上の単体的複体とする．Δの要素FをΔの面といい，$\dim F = |F| - 1$をFの次元という．Δの次元は$\dim \Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$で定義する．

単体的複体Δの任意の極大面 (ファセット) の次元がすべて等しいとき，Δを純な単体的複体という．

定義 2.3 (シェリング可能性): 純な単体的複体 Δ がシェリング可能であるとは，Δのファセットの集合に全順序 $F_1, \ldots, F_m$ を与えることができ，任意の$i, j, 1 \le j < i \le m$に対して，$v \in F_i \backslash F_j$ と $k \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$が存在して $F_i \backslash F_k = \{v\}$ が成り立つときをいう．このとき，この全順序をΔのシェリングという．

3 順序複体とシェリング可能性

定義 3.1 (順序複体): Pを半順序集合とする．$v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} \in P$が$v_{i_1} \le \cdots \le v_{i_r}$をみたすとき，$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ をPの鎖という．$\Delta(P)$をPのすべての鎖からなる集合とし，Pに付随する順序複体という．

定義 3.2. 半順序集合が最小元と最大元を持つとき，有界な半順序集合という．半順序集合のすべての極大鎖が同じ長さを持つとき，純な半順序集合という．有界かつ純な半順序集合を次数付き半順序集合という．

補題 3.3. $(P, \le)$ を純な半順序集合とし，$\hat{0}, \hat{1} \notin P$ を任意の$x \in P$に対して$\hat{0} \le x \le \hat{1}$を満たすものと定義する．すると，次のことが成立する：

(1) $(P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}, \le)$ は次数付き半順序集合である．

(2) $\Delta(P)$ がシェリング可能であるための必要十分条件は$\Delta(P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\})$ がシェリング可能であることである．

上の補題によって，$\Delta(P)$ のシェリング可能性を考えるためには，次数付き半順序集合についてのみ考えればよいことがわかる．

定義 3. 4 (局所弱上半モジュラー半順序集合): 半順序集合 $(P,\leq)$ が局所弱上半モジュラー半順序集合であるとは，$x \prec u,v$ かつ $u,v < t$ であるとき，$w_1,\ldots,w_p,y_1,\ldots,y_{p+1} \in P$ が存在して，$x \prec w_i, i=1,\ldots,p$, $u=w_0, w_1 \prec y_1$, $w_1,w_2 \prec y_2$, …, $w_p,w_{p+1}=v \prec y_{p+1}$ かつ $y_i \leq t$, $1 \leq i \leq p+1$ を満たすときをいう．ただし，$x \prec u$ とは $x \leq u$ であって，$x \leq y \leq u$ なら $x=y$ か $y=u$ となるときをいう．

命題 3. 5 (必要条件): $(P,\leq)$ を次数付き半順序集合で，$\Delta(P)$ がシェリング可能であるものとすると，P は局所弱上半モジュラーである．

$(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とし，$\mathcal{M}$ を P のすべての極大鎖からなる集合とする．このとき，$E(P)=\{\{m,m'\}: m,m' \in \mathcal{M}, |m\backslash m'|=1\}$ として，グラフ $G(P)=(\mathcal{M},E(P))$ をつくると，$G(P)$ は連結になる．このグラフの各辺に彩色することを考える．各辺 $\{m,m'\} \in E(P)$ には，色 $i=\text{rank }\{m\backslash m'\}$ を着けることにする．ただし，$\hat{0} \prec v_1 \prec \cdots \prec v_r$ であるとき，rank $v_r=r$ である．

定義 3. 6 . $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とし，$S \subset \mathcal{M}$ とする．$G(P)$ が S に関して性質 (C) を持つとは：
(C) $G(S)$ を S によって誘導された $G(P)$ の部分グラフとし，$m,m' \in S$ とする．このとき，m と m' を結ぶ道が $G(S)$ に存在し，道の中の任意の辺 $\{m'',m'''\}$ の色は，$\{i \mid \exists u \in m\backslash m' \ s.t.\ i=\text{rank }u\}$ に含まれる．
をみたすときをいう．

定義 3. 7 . $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とする．$G(P)$ が性質 $(C\text{-}k)$ を持つとは，$S \subset \mathcal{M}$ $(|S|=k)$ と $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k = S$ $(|S_i|=i\,(1 \leq i \leq k))$ が存在して，$G(P)$ は $S_i\,(1 \leq i \leq k)$ に関して，性質 (C) を持つときをいう．

定理 3. 8 (必要十分条件): $(P,\leq)$ がシェリング可能であるための必要十分条件は，$G(P)$ が性質 $(C\text{-}|\mathcal{M}|)$ を持つことである．

定義 3. 9 (本質的なサイクル): $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とする．$\bar{C}$ を $G(P)$ のサイクルとしたとき，$\bar{C}$ を根とし，各ノードが $G(P)$ のサイクルからなる木を構成する．

(1) $\bar{C}$ を根とし，活性ノードとする．

(2) C を木の活性なノードに対応する $G(P)$ のサイクルとする．C' を $G(P)$ のサイクルで，C と共通な辺を持ち，2色で彩色されているものとする．$\{C_1,\ldots,C_k\}$ を C と C' の対称差 $C \oplus C'$ から生成されるサイクルとする．このとき，C の子ノードを $C_1,\ldots,C_k$ および C' とし，C と C' を不活性ノードとする．また，$\{C_1,\ldots,C_k\}$ のうちで，2色で彩色されているものがあれば，やはり不活性ノードとする．不活性ノードとならない子ノードは活性ノードとする．

$\bar{C}$ を根とする木で，すべてのノードが不活性ノードとなるものが存在するとき，$\bar{C}$ を非本質的なサイクルといい，そうでない場合，本質的なサイクルという．

定理 3. 10 . $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合ととする．$\Delta(P)$ がシェリング可能であれば，$G(P)$ は本質的なサイクルを含まない．

参考文献

[1] Björner, A., "Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets." *Tans. Amer. Math. Soc.*, 260, 159-183 (1980).

[2] Brums, W. and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings,* Cambridge University Press (1993).

[3] 日比孝之,「可環代数と組合せ論」，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1995).