1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# シミュレーションを用いた アメリカンオプションの価格評価

02301950　早稲田大学　*高原 陽一　TAKAHARA Yoichi
01603200　早稲田大学　森戸 晋　MORITO Susumu
02201770　早稲田大学　坂本 宗隆　SAKAMOTO Munetaka

## 1　はじめに

満期以前で行使可能なアメリカンオプションは、ブラック・ショールズモデルが想定する仮定が成立する場合でも閉じた形の解が存在しないため、何らかの数値的方法によりその価格の評価を行わざるをえない。

価格評価の方法としては、動的計画法(DP) を用いて最適政策を求める格子モデルがある。しかし、格子モデルでは原証券の株価過程に強い仮定をおかなければならないことが問題とされてきた。この問題を回避するために、近年、シミュレーションを用いた価格評価の研究が行われている。Tilley[2] の方法は、ある時点での株価を既知としたときにオプションの最大価値をバックワードで順次求めていく方法である。

ところが、与えられた時点における株価に対してオプションを行使するのがよいか否かを定めるしきい値、すなわち「**早期行使境界**」は、オプションを行使したときの利得とオプションを保持したときの期待利得とが一致する株価であり、**価格を求めようとするオプションの原証券の初期価格に依存しない**ことが知られている。

本研究では、この性質を使って、格子モデルやTilley のモデルのように、ある時点における株価を所与としたときのオプションの価格を、考え得るすべての株価に対して求めるのでなく、**早期行使境界だけを先にシミュレーションにより求め、その後、初期株価からサンプルパスを発生させ、求めるオプションの価格を計算する**という方法を提案し、既存の方法との比較検討を行う。

## 2　Tilley のシミュレーション法

Tilley は各サンプルパス毎に、最初に「行使したときの利得が保持したときの期待利得を上回る時点」を見つけることにより、そのサンプルパスより得られる利得を計算し、全サンプルにおける利得の平均をアメリカン・プットオプションの価格としている。

Tilley は保持した時の期待利得を以下のように求めている。まず、全サンプルパスを算出する。その後各時点でサンプルをソートし、等数個ずつサンプルを束に分ける。そして同じ束に入っているサンプルのその期以降の価値を平均し、それを保持したときの期待利得とする。つまり、同じ束に属するサンプルの保持したときの期待利得はすべて同じとなる。

満期での行使境界は行使価格であるので、満期時点からバックワードにすべてのサンプルに対して行使するか否かを決定することにより、アメリカンオプションの価格評価ができる。

$P(x_b(t), T-t, K)$ を株価 $x_b(t)$、行使期間 $[t,T]$、行使価格 $K$のアメリカン・プットオプションを保持したときの期待利得とすると、時刻 $t$ における早期行使境界 $x_b(t)$ は、

$$P(x_b(t), T-t, K) = K - x_b(t) \qquad (1)$$

となる原証券の価格である。

格子モデルやTilley の方法では初期株価から到達可能なサンプルパスを作り、そのサンプル上での早期行使境界を求めていた。しかし、(1) を満たす $x_b(t)$ は初期価格に依存しないので、**早期行使境界そのものを探索することができないであろうか。**

## 3　本研究の方法

### 3.1　2 段階のシミュレーション

提案する方法は2 つの段階から成り立ち、各段階ともシミュレーションに基づく方法である。

**第1段階：**　早期行使境界を満期 $T$からバックワードで求める

**第2段階：**　初期株価 $S_0$を与え、オプションの価格を求める

### 3.2　第2段階におけるオプション価格の推定法

早期行使境界が行使期間すべてにおいて既知であるとする。初期株価 $S_0$よりサンプルパスを作り、はじめて早期行使境界以下になった時点において行使が起こる。その時点での利得 $K - s(i,t)$ を初期時点に割り引いたものが1 つのサンプルパスからの利益となる。そして全サンプルパスからの利益の平均がアメリカンオプションの価格となる。

### 3.3　早期行使境界の推定法

**2** の終りに述べた疑問に答え、新しいシミュレーション法を提案するために、以下の命題1 に着目する。

**命題 1**: $t+1$ 期から満期 $T$までの早期行使境界が既知であれば、試行錯誤的な方法により、$t$ 期の早期行使境界 $x_b(t)$ を求めることができる。

$x_b(t)$ は等式(1) を満たすことがわかっている。そこで、試行錯誤的な方法は $x_b(t)$ の候補 $x_b'(t)$ を推定し、出された候補に対して等式(1) が成立するかどうかを見る。等式(1) が満たされれば、$x_b(t) = x_b'(t)$ となり、等式が成立しない時には次の候補を出して等式が成立する $x_b'(t)$ が求まるまで同じプロセスを繰り返す。

等式(1) の左辺は、初期価格 $x_b(t)$、行使期間 $[t,T]$、行使価格 $K$のオプションの価格である。これは、**3.2** で述べた第2 段階と同じ方法を用いて、$x_b(t)$ の候補 $x_b'(t)$ からサンプルを出すシミュレーションによって推定することができる。

## 4　アルゴリズム

**記号の定義**

$x_b(t)$　:時点 $t$ での早期行使境界

$x_b'(t)$　:時点 $t$ での早期行使境界の候補

$s'(i, t+j\Delta t)$ :$x'_b(t)$ からの $i$ 番目のサンプル (時刻 $t+j\Delta t$)

$Q(i,t)$ :$i$ 番目のサンプルで保持したときの期待利益

$Q(t)$ :$x'_b(t)$ での保持したときの期待利益、$Q(i,t)$ の和

$s(i,t)$ :初期価格からの $i$ 番目の $t$ 時点でのサンプル

$P(i)$ :$i$ 番目のサンプルパスからの利益

$P$ :アメリカン・プットオプションの価格

**第1段階** 早期行使境界の算出

**Step 1:** 時刻 $t$ (初期値 $T-\Delta t$) での早期行使境界の候補 $x'_b(t)$ から次の時点へサンプル $s'(i, t+\Delta t)$、初期 $i=1$ を出す。

**Step 2:** サンプル $s'(i, t+j\Delta t)$ と早期行使境界 $x_b(t+j\Delta t)$ の比較

- サンプルが早期行使境界以下であるならば、
$$Q(i,t) = e^{-rj\Delta t}(K - s'(i, t+j\Delta t))$$
とし、Step 3 へ
- 満期かつサンプルが早期行使境界より大きいなら
$$Q(i,t) = 0$$
とし、Step 3 へ
- サンプルが早期行使境界より大きく、かつ満期以前であるならば、次の期へサンプル $s'(i, t+(j+1)\Delta t)$ を伸ばす。$j=j+1$ として Step 2 へ

**Step 3:** $Q(t)$ が収束しているかどうかの判定
$$Q(t) = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} Q(k,t)$$
収束していない場合には新たなサンプルを生成する。$i=i+1$ として Step 1 へ
収束している場合には Step 4 へ

**Step 4:** 早期行使境界の定義式 (1) を満たしているのかどうかの判定
$$K - x'_b(t) = Q(t)$$
の式を満たす場合は
$$x_b(t) = x'_b(t)$$
となり、時点 $t$ での早期行使境界が決定、Step 5 へ
満たさない場合には新たに早期行使境界の候補 $x_b(t)$ を設定し、Step 1 へ

**Step 5:** $t \neq 0$ ならば $t = t - \Delta t$ として Step 1 へ
$t = 0$ ならば終了、第2段階へ

**第2段階** アメリカン・プットオプションの価格の算出

**Step 1:** $i = 0$

**Step 2:** 初期値 $S_0$ から次の時点へサンプル $s(i, j\Delta t), j=1$ を生成

**Step 3:** サンプル $s(i, j\Delta t)$ と早期行使境界 $x_b(j\Delta t)$ の比較

- サンプルが早期行使境界以下であるならば、
$$P(i) = e^{-rj\Delta t}(K - s(i, j\Delta t))$$
として Step 4 へ
- 満期かつサンプルが早期行使境界より大きいなら
$$P(i) = 0$$
として Step 4 へ
- サンプルが早期行使境界より大きく、かつ満期以前であるならば、次の期へサンプル $s(i, t+(j+1)\Delta t)$ を伸ばす。$j=j+1$ として Step 3 へ

**Step 4:** $Q$ が収束しているかどうかの判定
$$P = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} P(k)$$
が収束していない場合には新たなサンプルを生成する。$i=i+1$ として Step 2 へ
収束している場合には終了。$P$ が派生証券の価格。

# 5 提案方法の特徴

## 5.1 提案方法から生じうる誤差

この方法では3種類の誤差が生じうる。提案方法の精度を上げるには、これらの誤差を許容範囲内に納める必要がある。

1. 第1段階で早期行使境界を求めるために等式 (1) の左辺を推定するシミュレーションの収束判定における誤差
2. 第1段階で早期行使境界の候補が等式 (1) を満たしているかどうか、つまり正しい早期行使境界が見つかったの判定における誤差
3. 第2段階で初期価格 $S_0$ をもとにオプションの価格を求めるシミュレーションの収束判定における誤差

## 5.2 提案方法の利点

第1段階で得られた早期行使境界を保存しておけば、行使価格 $K$ さえ同じならば、初期価格や行使期間が異なっても、オプションの価格を第2段階のシミュレーションのみで求めることが出来る。

# 参考文献


[1] Carr,P., Jarrow,R. and Myneni,R. "Alternative characterizations of American put options" *Mathematical Finance*,Vol.2,87-106,1992.

[2] Tilley,J.M."Valuing American Options in a Path Simulation Model" *Transactions of the Society of Actuaries*,Vol.45,83-104,1995.