1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

無人ＡＴＭにおける最適予備キャッシュボックス数

01402793　名古屋銀行システム部　＊　中村　正治　NAKAMURA Syouji
01204194　流通科学大学情報学部　　三道　弘明　SANDOH Hiroaki
01400043　愛知工業大学　　中川　覃夫　NAKAGAWA Toshio

1.　はじめに

近年の銀行は，無人のＡＴＭを用いて土曜，日曜日にも預金および引き出しのサービスを実施している．ＡＴＭ内部には，手提げ金庫のような箱が設置してあり，この箱の中に現金を保管するような仕組みになっている．以後このような現金保管用の箱をキャッシュボックスと呼ぶこととする．

ＡＴＭ内部には，預金には預金専用，引き出しには引き出し専用のそれぞれ１個のキャッシュボックスが設置されている．このうち，引き出し専用のキャッシュボックスには，予め一定額の現金が保管されており，中の現金が消費尽くされると，そのＡＴＭでの引き出しサービスは停止することとなる．顧客の需要があるにも拘わらずＡＴＭでの引き出しサービスが停止した場合には，空のキャッシュボックスを新たなキャッシュボックスに取り替えることでサービスを再開することができる．

平日の通常支店では，行員がキャッシュボックスに現金を補充しているが，初めから無人のＡＴＭや，通常支店での土曜，祝日には，ＡＴＭの現金がなくなると，予め契約を結んでいる警備会社(これをキャッシュボックス交換業者と呼ぶこととする) などにその旨連絡されるようになっている．連絡を受けた交換業者は，前もってその支店専用に確保してあった予備のキャッシュボックスを現地に持参し，空のキャッシュボックスと新たなそれとを交換することで，現金引き出しサービスが再開される．

以上に述べたような状況の下，無人ＡＴＭの運用に関して当該銀行には，以下の３種類の費用が発生する．

(1) 予備のキャッシュボックスのために現金を確保することで，余剰資金となり，機会損失費用が発生する．

(2) 予備のキャッシュボックスの現金も消費し尽くした場合，顧客は他の銀行のＡＴＭに出向き，現金を引き出すこととなる．この場合，顧客が手数料を支払うだけではなく，当該銀行も引き出し金額に比例した費用を他行に支払わなければならない．

(3) キャッシュボックス交換業者に対しては，固定的な契約料以外に，キャッシュボックス毎に配達，交換手数料が発生する．

以上に述べた状況では，各支店毎に予備のキャッシュボックスを何個用意すればよいかが問題となる．本研究では，このような問題に対し，キャッシュボックスの最適予備数を決定するためのモデルを提案する．

2.　期待費用

以下のように記号を定義する．

- A　当該支店のＡＴＭに初めに確保された現金．
- a　キャッシュボックス１個あたりに収納可能な現金
- c_1　現金を予備キャッシュボックス用に確保することによる単位キャッシュあたり機会損失費用
- c_2　顧客が他行のサービスを受けることで発生する単位キャッシュあたり費用
- c_3　交換業者に対して支払うべきキャッシュボックス１個あたり配達，交換手数料
- $F(x)$　当該支店での引き出し需要量の総額 x に対する *cdf*
- $f(x)$　$dF(x)/dx$
- α　x のうち他行利用者による引き出し金額の割合

上記のような記号の下，予備キャッシュボックスを n 個としたときの期待費用は次式で与えられる．

$$C(n) = nc_1a \tag{1}$$
$$+ \; c_2\left\{\int_{A+na}^{\infty}\left[(1-\alpha)(x-A-na)\right.\right.$$

$$-\alpha(A+na)\Big]dF(x)$$

$$-\int_0^{A+na}\alpha x dF(x)\Big\}$$

$$+\quad c_3\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\int_{A+ia}^{A+(i+1)a}dF(x)$$

$$+n\int_{A+na}^{\infty}dF(x)\Big],\quad n=0,1,2,\cdots$$

但し

$$\sum_{i=0}^{-1}\cdot=0 \tag{2}$$

と定義することとする.

式(1)において，右辺第1項は，予備キャッシュボックス用資金として合計 na を確保することによる機会損失費用を表している．これに対して第2項は，予備キャッシュボックスの資金も含めて，無人ＡＴＭの資金を消費し尽くしたことで，顧客が他行のＡＴＭに流れることによる費用から，他行の利用者が当該銀行を使用することによる収入を差し引いたものである．また，第3項は，交換業者に支払うべきキャッシュボックスの配達ならびに交換手数料を表している.

式(1)を整理すると

$$\begin{aligned} C(n) &= nc_1a \\ &+ c_2\left[\int_{A+na}^{\infty}\overline{F}(x)dx-\alpha\mu\right] \\ &+ c_3\sum_{i=0}^{n-1}\overline{F}(A+ia),\quad n=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

を得る．ここに

$$\mu=\int_0^{\infty}\overline{F}(x)dx \tag{4}$$

であり，平均引き出し金額を表す.

以上のことから，式(3)の $C(n)$ を最小にするような n が最適予備キャッシュボックス数である.

3. 最適予備キャッシュボックス数

式(3)の差分をとり，$\Delta C(n)\equiv C(n+1)-C(n)\geq 0$ とおくと

$$\frac{c_1a+c_3\overline{F}(A+na)}{\int_{A+na}^{A+(n+1)a}\overline{F}(x)dx}\geq c_2 \tag{5}$$

を得る．ここで

$$y\ \equiv\ A+na,\quad y\geq A, \tag{6}$$

とおいた上で，式(5)の左辺を $L(y)$ とおくと，式(5)は

$$L(y)\equiv\frac{c_1a+c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx}\geq c_2 \tag{7}$$

となる.

$L(y)$ について調べると

$$\lim_{y\to+\infty}L(y)=+\infty \tag{8}$$

および

$$\begin{aligned} L'(y) &= \frac{F(y+a)-F(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx}\left[\frac{c_1a+c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx}\right. \\ &\left.-\frac{c_3f(y)}{F(y+a)-F(y)}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

が得られる.

ここで，$F(x)$ がIFR[1]あるいはCFR[1]であるならば

$$\frac{f(x)}{\overline{F}(x)}\geq\frac{f(y)}{\overline{F}(y)},\quad y\leq x\leq y+a \tag{10}$$

が成立することから

$$\begin{aligned} \frac{c_1a+c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx} &\geq \frac{c_1a+c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}f(x)\frac{\overline{F}(y)}{f(y)}dx} \\ &= \frac{\frac{c_1a}{\overline{F}(y)}+c_3f(y)}{F(y+a)-F(y)} \end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ．すなわち

$$L'(y)>0 \tag{12}$$

が成り立ち，$L(y)$ は y に関して単調増加である．よって，式(7)を満たす y が存在すれば，その最小値から最適予備キャッシュボックスの数 n^* を算出することができる.

以上のことから，$F(x)$ がIFRあるいはCFRであるときの最適方策は

(1) $[c_1a+c_3\overline{F}(A)]/\int_A^{A+a}\overline{F}(x)dx<c_2$ ならば，式(7)を満たす最小の $n^*\geq 1$ が存在する.

(2) $[c_1a+c_3\overline{F}(A)]/\int_A^{A+a}\overline{F}(x)dx\geq c_2$ ならば，$n^*=0$ である.

4. 数値例

紙数の関係上，数値例は当日報告させて頂く.

参考文献

[1] Barlow, R.E. and Proschan, F: *Mathematical theory of reliability*, Wiley, New York, 1965.