1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

フローゲームの凸性について

*村田 真紀† MURATA Maki　02601514 牧野 和久† MAKINO Kazuhisa
01991325 曽　道智‡ ZENG DaoZhi　01403794 永持　仁† NAGAMOCHI Hiroshi
01001374 茨木 俊秀† IBARAKI Toshihide

† 京都大学 工学研究科　‡ 香川大学 経済学部

1 序論

協力ゲームとは, プレイヤーの集合 Iと特性関数 $g : 2^I \mapsto \Re^+$ ($\Re^+$:非負の実数集合) との組 (I, g) である. Iの部分集合 I'は提携と呼ばれ, $g(I')$ は I'内のプレイヤーが結託したときに得られる利潤を表している. 協力ゲームの理論では, 全体の利益 $g(I)$ を各プレーヤーに ($g(I')$, $I' \subset I$の値も鑑みながら) いかに「公平に」配分するかという問題が1つの中心的な課題であり, これまでにそのような配分方法として コア, τ-値, シャープレイ値など様々な概念が提案されている. しかし, コア, τ-値と呼ばれる配分法は特性関数 gが特別は条件を満たすときでなければ適用できない. 協力ゲーム (I, g) は, 条件:

$$g(I' \cup \{k\}) - g(I') \geq g(I'' \cup \{k\}) - g(I'')$$

$$\forall i \in I,\ \forall I'' \subseteq \forall I' \subseteq I - \{i\}$$

を満たすとき凸であると呼ばれ, 凸な協力ゲームにはコアやτ-値などの配分法が適用できることが知られている (協力ゲームの理論については, 例えば [2] を参照).

本研究では, フローゲーム [1] と呼ばれるネットワークに基づいて定義される協力ゲームを対象とし, このゲームが凸になるための必要十分条件を明らかにした.

2 諸定義

点集合 V, 辺集合 $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ の組 (V, E) をグラフと呼び, 各辺に重み (容量) を付したグラフ, すなわち, 点集合 V, 辺集合 E および容量 $c : E \mapsto \Re^+$ の組 (V, E, c) をネットワークと呼ぶ. ネットワーク Nの2点 $u, v \in V$を結ぶ路 Pを (u, v)-路と呼ぶ. $u = v$の場合, (u, v)-路を閉路と言う. 路や閉路において同じ点を2度以上通過することはないものとする. 路 Pの辺集合を $E(P)$ で, 点集合を $V(P)$ で記す. 非負実数αの重みを持つ路 Pを (P, α) で表す. 指定された点対 $s, t \in V$に対し, 重み付き (s, t)-路の集合 $\Pi = \{(P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2), \ldots, (P_k, \alpha_k)\}$ は, 容量制約

$$\sum\{\alpha_i \mid e \in E(P_i)\} \leq c(e), \quad \forall e \in E$$

を満たすとき (s, t)-フローと呼ばれ, $\sum_{i=1,\ldots,k} \alpha_i$ をΠのフロー値と呼ぶ. フロー値を最大にする (s, t)-フローを最大 (s, t)-フローと呼び, そのフロー値を $f_N(s, t)$ と記す. このとき (s, t) をフローの流入出点と言う.

指定された流入出点 (s, t) を持つネットワーク $N = (V, E, c)$ が与えられたとき, 各辺をそれぞれ一人のプレイヤーとみなす次のような協力ゲーム (E, g) を考える. Eをプレイヤーの集合とし, 特性関数 $g : 2^E \mapsto \Re^+$を

$$g(E') \equiv f_{N[E']}(s, t), \quad E' \subseteq E.$$

により定める. このように定義されたゲームを初等的フローゲームと呼ぶ.

ネットワーク Nの辺の部分集合 $E' \subseteq E$に対し, $N[E']$ によって E'以外の辺を除去したネットワークを示す. また, Nにおいて正の容量を持つ辺のみから成るネットワークを N^+と書く. すなわち, $N^+ = N[E^+]$, $E^+ = \{e \in E \mid c(e) > 0\}$. N^+をブロック (2連結成分) に分割し, $E_1^+, E_2^+, \ldots, E_k^+$を各ブロックに対する辺集合 E^+の分割としたとき, E_i^+を単にブロックとも呼ぶ.

3 主結果

以下, 流入出点 (s,t) を持つネットワーク $N=(V,E,c)$ において, $E_i^+\cap E(P_{s,t})=\emptyset$ なる s,t 間の路 $P_{s,t}$が取れるようなブロック E_i^+は存在しないと仮定する (明らかに, そのような E_i^+は N の初等的フローゲームのおいて本質的な役割を果たさない).

端子と呼ばれる2点 s,t を持つグラフは, 以下のように定義されるとき (s,t)-直並列グラフと呼ばれる.

(0) 2点 s,t を結ぶ辺のみから成るグラフ. この (s,t)-直並列グラフは自明と呼ばれる.

(1) 2つの (s,t)-直並列グラフ G_1,G_2から, G_1の端子 t と G_2の端子 s を同一視し, G_1の端子 s と G_2の端子 t を新しい s,t 端子対とするグラフ. この操作を G_1,G_2の直列結合と呼ぶ.

(2) 2つの (s,t)-直並列グラフ G_1,G_2から, それぞれ G_1,G_2の端子 s 同士, G_1,G_2の端子 t 同士を同一視し, これらを新しい端子の対とするグラフ. この操作を G_1,G_2の並列結合と呼ぶ. □

補題 3.1 (E,g) を流入出点 (s,t) を持つネットワーク $N=(V,E,c)$ に対する初等的フローゲームとする.

(i) N^+の並列成分を $N_1,N_2,\ldots,N_p$としたとき, (E,g) が凸である必要十分条件は, 各 N_iに対しその端子対を流入出点とする初等的フローゲームもまた凸であることである.

(ii) N^+の直列成分を $N_1,N_2,\ldots,N_q$としたとき, (E,g) が凸である必要条件は, 各 N_iに対しその端子対を流入出点とする初等的フローゲームもまた凸であることであり, かつ, 直列成分 $N_1,N_2,\ldots,N_q$のうち自明でない成分は高々1つしか存在しない. □

この補題の条件 (i),(ii) を満たすグラフを制限付き (s,t)-直並列グラフと呼ぶ. すなわち, 制限付き (s,t)-直並列グラフは次のように定義される端子対 (s,t) を持つグラフ G である.

(0) 2点 s,t および, s,t を結ぶ辺のみから成るグラフ. これを自明な制限付き (s,t)-直並列グラフと呼ぶ.

(1) G の並列成分 $G_1,G_2,\ldots,G_p$のどれもが制限付き (s,t)-直並列グラフであるようなグラフ G.

(2) G の直列成分 $G_1,G_2,\ldots,G_q$の高々1つが非自明な成分であり, 非自明な成分 G_jが制限付き (s,t)-直並列グラフであるようなグラフ G. □

制限付き (s,t)-直並列グラフ G の各辺に容量を付した制限付き (s,t)-直並列ネットワークは, 次の条件を満たすとき, (s,t)-凸ネットワークと呼ばれる.

(0) 2点 s,t を結ぶ辺のみから成るネットワーク. これを自明な (s,t)-凸ネットワークと呼ぶ.

(1) Nの並列成分 $N_1,N_2,\ldots,N_p$のどれもが (s,t)-凸ネットワークであるようなネットワーク N.

(2) $N_1,N_2,\ldots,N_q$を Nの直列成分とする. このとき, $N_1,N_2,\ldots,N_q$のうち非自明な成分は高々1つしかなく, 非自明な成分 N_jが (s,t)-凸ネットワークであり, かつどの自明な成分 N_iの辺容量の大きさも非自明な成分 N_j の端子間の最小カットの大きさ以上であるなら, Nは (s,t)-凸ネットワークである. □

定理 3.1 流入出点 (s,t) を持つネットワーク $N=(V,E,c)$ に対する初等的フローゲーム (E,g) が凸になる必要十分条件は, N^+が (s,t)-凸ネットワークであることである. □

参考文献

[1] E. Kalai and E. Zemel, Totally balanced games and games of flow, *Math. of Operations Research*, Vol. 7, 1982, pp. 476-478.

[2] 鈴木光男, 新ゲーム理論, 勁草書房, 1993.