# 箱制約非凸2次計画問題に対する多面体アプローチ

02501520 東京工業大学 *藤江 哲也 FUJIE Tetsuya
01703730 東京工業大学 矢島 安敏 YAJIMA Yasutoshi

## 1 はじめに

本稿では，箱制約非凸2次計画問題 (Nonconvex Quadratic Programming Problem with Box Constraints):

$$(QP)\quad \begin{array}{|ll} \text{Minimize} & x^TQx + c^Tx \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n q_{ij}x_ix_j + \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{subject to} & 0 \le x_j \le 1 \ (1 \le j \le n) \end{array}$$

(ただし，$x = (x_1,\ldots,x_n)^T, c = (c_1,\ldots,c_n)^T$，$Q$ は $n \times n$ 対称行列) に対する多面体アプローチを提案する．まず，新たな変数 $y_{ij} (1 \le i \le j \le n)$ を用いた$(QP)$と同値な問題:

$$(QP_E)\quad \begin{array}{|ll} \text{Minimize} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n q_{ij}y_{ij} + \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{subject to} & 0 \le x_j \le 1 \ (1 \le j \le n), \\ & y_{ij} = x_ix_j \ (1 \le i \le j \le n) \end{array}$$

を導入する．$(QP_E)$ の目的関数は線形であるため，実行可能解集合

$$QP_n \equiv \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x_j \le 1 \ (1 \le j \le n), \\ y_{ij} = x_ix_j \ (1 \le i \le j \le n). \end{array} \right\} \subseteq R^n \times R^{n(n+1)/2}$$

を多面体で近似すれば，LP を解くことで $(QP)$ の近似解を得ることができる．以下，$QP_n$に対する妥当な不等式を示す．

## 2 LP 緩和

**補題 1**

$$CQP_n \equiv \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} x_i - y_{ij} \ge 0, \ x_j - y_{ij} \ge 0, \\ 1 - x_i - x_j + y_{ij} \ge 0, \\ y_{ij} \ge 0 \ (1 \le i \le j \le n). \end{array} \right\} \subseteq R^n \times R^{n(n+1)/2}$$

は有界であり，$QP_n \subseteq CQP_n$．また $CQP_n$ の任意の解を $(\bar{x},\bar{y})$ とすると，$\bar{x}$ は $(QP)$ の実行可能解である．■

したがって，LP：

$$(CQP)\quad \begin{array}{|ll} \text{Minimize} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n q_{ij}y_{ij} + \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{subject to} & (x,y) \in CQP_n. \end{array}$$

の最適値は $(QP_E)$ の下界 (すなわち $(QP)$ の下界) を与える．$CQP_n$ の各不等式は，Sherali ら [4, 5] の方法の特殊な場合とみなすことができる．

$QP_n$にはさらに妥当な不等式が存在する．以下では，$S \subseteq N \equiv \{1,\ldots,n\}$ に対し

$$V_S(x) \equiv \sum_{i \in S} x_i, \quad E_S(y) \equiv \sum_{i,j \in S, i<j} y_{ij}$$

とし，また $S \cap T = \emptyset$ である $S,T \subseteq N$ に対し

$$E_{S:T}(y) \equiv \sum_{\substack{i<j \text{ and} \\ i\in S, j\in T \text{ or } j\in S, i\in T}} y_{ij}$$

と定義する．

**定理 2 (クリーク不等式)** 任意の $S \subseteq N$ と $0 \le \alpha \le |S|$ なる任意の整数$\alpha$ に対して

$$\alpha V_S(x) - E_S(y) \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．■

**系 3 (三角不等式 (1))** 任意の異なる $i,j,k \in N$ に対して

$$\begin{array}{rcl} x_i + x_j + x_k - y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} & \le & 1 \\ 2(x_i + x_j + x_k) - y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} & \le & 3 \end{array}$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．■

**定理 4 (一般化カット不等式)** $S \cap T = \emptyset$ である任意の $S,T \subseteq N$ と任意の整数$\alpha$ に対して

$$E_S(y) + E_T(y) - E_{S:T}(y) - \alpha V_S(x) + (\alpha+1)V_T(x) \ge 0$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．■

**系 5 (三角不等式 (2))** 任意の異なる $i,j,k \in N$ に対して

$$x_i - y_{ij} - y_{ik} + y_{jk} \geq 0$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．■

クリーク不等式と一般化カット不等式は，Boolean Quadric Polytope

$$\begin{aligned} BQP_n &\equiv \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_j \in \{0,1\}\ (1 \leq j \leq n), \\ y_{ij} = x_i x_j\ (1 \leq i < j \leq n). \end{array} \right\} \\ &\subseteq R^n \times R^{n(n-1)/2} \end{aligned}$$

のファセットを与える不等式である [3].

# 3 SDP 緩和と線形妥当不等式

$\boldsymbol{y} = (y_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n)$ に対し，$y_{ij}$ を要素とする対称行列 $Mat(\boldsymbol{y}) \in R^{n \times n}$ が定義できる．さらに

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & Mat(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} \in R^{(1+n)\times(1+n)}$$

とすると，SDP (SemiDefinite Programming) 緩和問題：

$$(SQP) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} q_{ij}y_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in CQP_n, \\ & \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \text{対称} \\ & \qquad\qquad \text{半正定値行列}. \end{array} \right.$$

は $(CQP)$ に比べ，より良い緩和を与える [1].

一方，$(CQP)$ にクリーク不等式や一般化カット不等式が加わった線形計画問題の最適解 を $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$ としたとき，$\boldsymbol{Z}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$ の最小固有値が負ならば，それに対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めることによって

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{v} \geq 0$$

なる (線形) 不等式が生成される ([2] など)．また，少ない計算の手間で同様の不等式を求めることも可能である．

**補題 6** 任意の $i \in N$ と $r \in R$ に対して

$$y_{ii} \geq 2rx_i - r^2$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．

**補題 7** 任意の $S \subseteq N$ に対して

$$2E_S(\boldsymbol{y}) \leq (|S|-1)\sum_{i \in S} y_{ii}$$

は $QP_n$ に対する妥当不等式である．

# 4 数値実験

線形計画問題 $(CQP)$ に本稿で提案した不等式を加える切除平面法と，それに基づく分枝限定法による数値実験を行った．その結果，上記の方法にさらに $(QP)$ に対するヒューリスティック解法を加えることによって，少ない分枝数で $\varepsilon$ 最適解を求めることができた．詳細は発表時に示す予定である．

# 参考文献


[1] T. Fujie and M. Kojima, "Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic programs," Research Report #298, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1995.

[2] M. Kubo, K. Fujisawa and S. Morito, "Experimental analysis of a semidefinite programming approach to the graph partitioning problem," 日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集 (1995) 244–245.

[3] M. Padberg, "The boolean quadratic polytope : some characteristics, facets and relatives," *Mathematical Programming* **45** (1989) 139–172.

[4] H.D. Sherali and A. Alameddine, "A new reformulation–linearization technique for bilinear programming problems," *Journal of Global Optimization* **2** (1990) 379–410.

[5] H.D. Sherali and C.H. Tuncbilek, "A reformulation–convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems," *Journal of Global Optimization* **7** (1995) 1–31.