1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

非線形相補性問題に対する新しいメリット関数

京都大学　*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　序論

非線形相補性問題 [2] は, 次の式をみたす $x \in R^n$ を求める問題である.

$$\text{[NCP]} \qquad \langle x, F(x)\rangle = 0,\ x \geq 0,\ F(x) \geq 0.$$

ここで, $F : R^n \to R^n$である.

この問題に対してこれまでに様々な方法が提案されている. そのひとつとして, この問題を等価な制約のない最小化問題に変換するアプローチが最近注目を集めている [1]. そのような最小化問題の目的関数をメリット関数と呼ぶ. NCP に対するメリット関数を定義するのに便利な, NCP 関数と呼ばれる関数$\theta : R^2 \to R$を次のように定義する.

定義 1.1 次の性質をみたす関数$\theta : R^2 \to R$を *NCP* 関数と呼ぶ.

$$\theta(a,b) = 0 \Longleftrightarrow ab = 0, a \geq 0, b \geq 0.$$

常に非負の値をとる NCP 関数θを用いれば, 次のようにメリット関数 $g : R^n \to R$を構成することができる.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i, F_i(x)).$$

つい最近, 次の NCP 関数が提案された [3].

$$\varphi(a,b) = \frac{1}{2}(ab)_+^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)_+^2.$$

ここで $(\cdot)_+ = \max\{0, \cdot\}$ である. この NCP 関数は, 以下の好ましい性質をすべて備えているという点で, これまでに提案された NCP 関数に比べて優れていた.

- ϕは微分可能である.
- Fが単調関数ならば, ϕを用いたメリット関数 gの停留点は NCP の解になる.
- Fが単調関数で NCP が狭義実行可能ならば, ϕを用いたメリット関数 g のすべてのレベル集合はコンパクトになる.

本発表では, 関数ϕによく似た次の関数を提案し, その性質を明らかにする.

$$\psi(a,b) = \frac{1}{4}(ab)_+^4 + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)^2. \qquad (1)$$

関数ψとϕの違いとそれによって期待できる好ましい性質は以下のものである.

- 第 1 項のべき乗が 4 であること.

  これによって, NCP の解の十分近くではψの第 1 項が無視でき, ψは squared Fischer 関数 $(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)^2$と実質的におなじものとみなすことができる. そのため, squared Fischer 関数について知られている性質が, 解の近傍において, ψに対しても成り立つことが期待できる.

- 第 2 項が $(\cdot)_+$ を含まないこと.

  これにより, 関数の解析がϕよりも容易になる. また, NCP の解においてϕは 2 回微分不可能であるが, ψは解が非退化であれば 2 回微分可能である.

2　メリット関数の性質

この節では, (1) で定義される関数ψが非負の NCP 関数であることを示す. また, ψによって構成されるメリット関数の停留点が NCP の解となるための条件を与える. さらに, そのメリット関数のすべてのレベル集合が有界となる条件を与える.

まず, 次の定理は容易に示すことができる.

定理 2.1 *(1)* で定義されたψは非負の *NCP* 関数である. □

以下では, NCP 関数ψを用いて定義される次のメリット関数 $g : R^n \to R$を考察する.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, F_i(x)). \qquad (2)$$

NCP 関数ψは微分可能であるので, もし Fが微分可能であれば g も微分可能となる.

また, 制約なし最小化問題:

$$\min_{x \in R^n} \quad g(x)$$

は, 次に示すように NCP と等価になる.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

定理 2.2 *(2) で定義される関数 g は非負である．また，NCP に解があるとき，$g(x)=0$ と x が NCP の解であることは等価である．* □

一般に関数 g は凸とはならない．一方，通常の最適化アルゴリズムは目的関数の停留点を求めるものである．そのため，目的関数の停留点がその問題の解であるための条件を求めることは重要である．この節の残りにおいて，この条件を調べる．そのために重要な役割を果たすNCP関数 ψ の性質を示す．

補題 2.1 *NCP 関数 ψ は，次の性質をもつ．*

(P.1) $\psi(a,b)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial\psi(a,b)}{\partial a}=0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial\psi(a,b)}{\partial b}=0$

(P.2) $\dfrac{\partial\psi(a,b)}{\partial a}\dfrac{\partial\psi(a,b)}{\partial b}\geq 0,\ \forall(a,b)^T\in R^2$ □

この補題から次の定理を得る．

定理 2.3 *F が単調関数であれば，g の任意の停留点は NCP の解となる．* □

この定理よりもさらに緩い条件で g の停留点が NCP の解になることを示すことができるが，ここでは省略する．

次に g のすべてのレベル集合が有界となる条件を与える．この性質が成り立つとき，g に対する降下法で生成される点列は集積点をもつことが保証される．

定理 2.4 *F が単調で NCP は狭義実行可能とする．このとき，レベル集合 $\mathcal{L}(c)=\{x\mid g(x)\leq c\}$ はすべての $c\geq 0$ に対して空でなく有界である．* □

3 降下法

この節では，メリット関数 g の制約なし最小化問題に対するアルゴリズムとして，次の降下法を提案する．

降下法

ステップ 1： 初期点 $x^0\in R^n$ とパラメータ $\alpha,\beta\in(0,1)$，$\gamma_1\in(\beta,1),\gamma_2\in(\gamma_1,\infty)$ を選ぶ．$k:=0$ とする．

ステップ 2： x^k が終了条件を満たせば終了．

ステップ 3： 適当な手法を用いて探索方向ベクトル s^k を決める．

ステップ 4： もし，

$$g(x^k+s^k)\leq\beta g(x^k)$$

ならば，$x^{k+1}:=x^k+s^k, k:=k+1$ としてステップ 2 へ．

ステップ 5： もし，

$$-\gamma_2\|\nabla g(x^k)\|^2\leq\langle s^k,\nabla g(x^k)\rangle\leq-\gamma_1\|\nabla g(x^k)\|^2$$

ならば，$d^k:=s^k$．そうでなければ $d^k:=-\nabla g(x^k)$ とする．

ステップ 6： 次の条件を満たす最小の非負の整数 m を求め，$t_k:=\alpha^m$ とする．

$$g(x^k)-g(x^k+\alpha^m d^k)\geq\alpha^m\beta\|\nabla g(x^k)\|^2. \quad (3)$$

ステップ 7： $x^{k+1}:=x^k+t_kd^k, k:=k+1$ としてステップ 2 へ．

探索方向 s^k を決める方法はいろいろ考えられる．例えば，[4] で提案されている修正ニュートン方向を探索方向とすれば，緩い条件のもとで解に超一次収束するアルゴリズムを構成することができる．

このアルゴリズムに対して次の収束定理が成り立つ．

定理 3.5 *F が単調で NCP は狭義実行可能点を持つとする．このとき，上記のアルゴリズムによって生成される点列は集積点をもち，その集積点は NCP の解である．* □

参考文献

[1] Fukushima, M., "Merit functions for variational inequality and complementarity problems," *Nonlinear Optimization and Applications*, Edited by G. Di Pillo and F. Giannessi, Plenum Publishing Corporation, New York, NY, to appear.

[2] Harker, P.T. and Pang, J.-S., "Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications," *Mathematical Programming*, Vol. 48, pp. 161–220, 1990.

[3] Kanzow, C., Yamashita, N. and Fukushima, M., "New NCP-Functions and Their Properties," *Journal of Optimization Theory and Applications*, to appear.

[4] Yamashita, N. and Fukushima, M., "Modified Newton methods for solving a semismooth reformulation of monotone complementarity problems," *Mathematical Programming*, to appear.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．