2－A－2

1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

凹2次型輸送問題の解法

02501950　法政大学　*蜂須賀 博和　HACHISUKA Hirokazu
01900070　法政大学　若山 邦紘　WAKAYAMA Kunihiro

1　はじめに

本研究では、以下のような線形制約のもとで、輸送費が凹2次型の輸送コスト最小化問題を取り上げる。

$$f(x) = c^t x - x^t Dx \rightarrow Min$$

sub.to

$$\sum_{j=1}^{n} = a_i, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} = b_j, \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)(j = 1, \ldots, n)$$

$$D : positive\ diagonal\ matrix$$

本研究では、降下法、内点罰金関数法及び、切除平面法を用いた凹2次関数の最小化のための解法、及び分枝限定法と *Out-of-Kilter Algorithm* を組み合わせた解法を用いて個々に輸送問題の最小化を図り比較を行なう。以下に本研究で用いた数値例を示しておく。(各流量に対して凹型コスト関数が与えられている。)

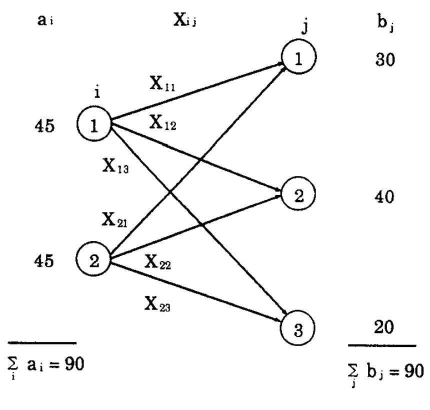

図1　ヒッチコック型輸送問題

*法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

2　アルゴリズム1

実社会おける輸送費は大量輸送のためコスト低減が生じ、非線形型コスト関数によって与えられる。このことから局所解が複数存在し、求められた解が大域的最適解とは限らなくなってしまう。(図2参照)ここで内点罰金関数法、降下法、切除平面を組み合わせ、最適解を求めるアルゴリズムを提案し、以下に示す。(今回は領域を切りつくした中で最小の値を与える端点を最適解とした。)

Step1 制約領域が空集合でないなら *Step2*、空集合であるなら *Step8* へ

Step2 $F(x)$ が凸となる罰金係数 K の決定

Step3 制約領域内での初期点の決定

Step4 降下法を用いて $F(x)$ の最小点を求める

Step5 十分0に近い罰金係数をとる

Step6 *Step4* での最小点を初期点とし、$F(x)$ 上で降下法を用いて最小点を求める

Step7 得られた端点において切除平面を生成し、制約領域の一部を取り除く(*Step1* へ)

Step8 終了 :制約領域を取り除いた中で最も最小な値を与える端点が最適解となる

3　アルゴリズム2

アルゴリズム2として分枝限定法と *Out-of-Kilter Algorithm*(以下 *OKA*)を組み合わせたアルゴリズムを提案する。(以降に分枝限定法と *OKA* を組み合わせたアルゴリズムを示す。)

3.1 分枝操作及び停止の規則

ここで今回用いた分枝限定法の分枝操作及び停止の条件を以下に記しておく。
分枝操作に関しては各流量ごとに原型関数と近似関数との誤差をとり、最大を与える流量に対して更に近似を行なう。(図3参照)

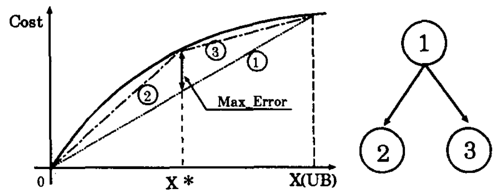

図2　分枝操作の例

次に停止操作について説明する。

$$z_{UB}^{n} < z_{UB}^{n+1} \rightarrow z_{UB}^{n+1} = z_{UB}^{n}$$

$$z_{LB}^{n} > z_{LB}^{n+1} \rightarrow z_{LB}^{n+1} = z_{LB}^{n}$$

上式によって各ノードでの上限、下限を決定させ、

$$z_{LB}^{n} > z_{UB}^{n}$$

となったノードに対してはそれ以降の分枝操作を打ち切る。

Step1 目的関数の線形近似

Step2 *OKA* での最小コストフローの算出

Step3 上限、下限の算出

Step4 上限と下限が一致したら *Step8* へそうでないなら *Step5* へ

Step5 分枝先の決定、下限の中で最小のものを選択

step6 そのノードにおいての最小コストフローにおける目的関数と近似関数の誤差が最大なものを求める

Step7 誤差が最大な目的関数に対し、その流量において線形近似を行なう *Step2* へ

step8 終了 :*Optimal flow & Optimal solution*

4　結論

今回2つの解法で最適解を得ることが出来た。処理時間ではアルゴリズム2は前の数値の利用が可能なので、ステップごとに処理時間は減少していくが、アルゴリズム1では点列が制約に近付くとステップサイズが微小となり、端点に収束するまでに時間がかかってしまう。この原因としては罰金係数 K を十分大きな値で与えているためであり、拡張目的関数を凸にさせる最小の K を求めてやれば初期点が収束する端点により近く与えてやることができ処理時間を短縮させることができると考えられる。

本研究では視覚的に判断し易い問題を扱ったが、これを n 変数問題にまで拡張させることが今後の課題となる。(以下に各解法による結果を示しておく。)

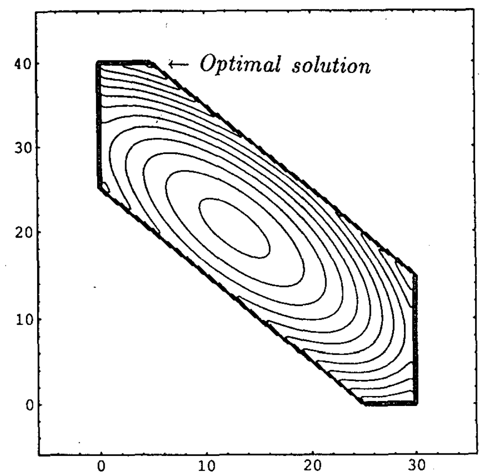

図3　解法1の結果

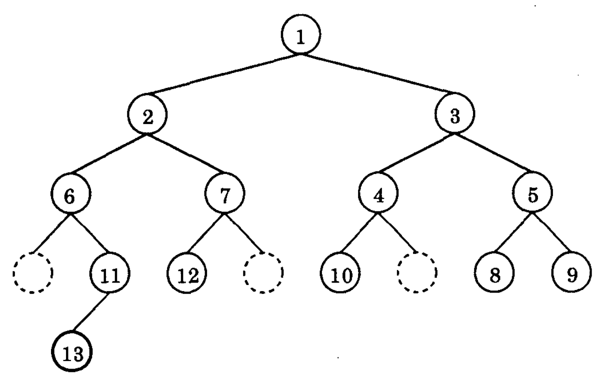

図4　解法2の結果

参考文献

[1] 今野, 山下　「非線形計画法」日科技連 *(1978)*

[2] *D.R.* プレン, 他　「整数計画法入門」 *(1976)*