1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

線形近似を用いた凹２次関数の最小化問題の解法

02601770 法政大学 *三竹 吉伸 MITAKE Yoshinobu
01900070 法政大学　若山 邦紘 WAKAYAMA Kunihiro

1 はじめに

本研究では、以下のように定式化される凹２次関数の最小化問題を取り上げる。

$$
\begin{aligned}
(Q)\quad & Minimize \\
& f_q(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{j\in J}\left(-c_j x_j^2 + d_j x_j\right) \\
& subject\ to \\
& \boldsymbol{x} \;\in\; S = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}\}
\end{aligned}
$$

ここで、Aは$(m \times n)$行列で、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \ge 0, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{u} \in R^n, \boldsymbol{b} \in R^m, J = \{1, \ldots, n\}$とし、制約領域$S$は空でない有界閉集合であることを仮定する。

一般に、凹関数最小化問題は、局所的最適解が制約領域の端点に複数個存在する。これらの端点の中に大域的最適解が存在するが、それを保証するような必要十分条件が存在しないため、効果的な解法がないといってよい。

そこで本研究では、線形近似関数を用いた変数領域の縮小による解法に対しての、初期変数領域の与え方による計算量の違いについて比較・検討を行なう。

2 線形近似関数の定義

制約領域$\boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}$を用いての、線形近似問題を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
(E)\quad & Minimize \\
& f_e(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{j\in J} t_j x_j + t_0 \\
& subject\ to \\
& \boldsymbol{x} \;\in\; S
\end{aligned}
$$

*法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

ここで、

$$
t_j = \frac{-c_j u_j^2 + d_j u_j + c_j l_j^2 - d_j l_j}{u_j - l_j}
$$

であり、t_0は適当な定数である。

3 変数領域の縮小

問題(E)の最適解とし、問題$(E),(Q)$の関数値をそれぞれ、$E(\boldsymbol{e}), Q(\boldsymbol{e})$とする。定数$K \ge 0$が与えられたとき、

$$
\boldsymbol{x} \in S, x_j \notin \left(\bar{l}_j, \overline{u}_j\right) \quad \text{for some} \quad j \in J
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
E(\boldsymbol{x}) \ge E(\boldsymbol{e}) + K
$$

となるような、新たな変数領域$(\bar{l}_j, \overline{u}_j)$を以下のように生成していく。

問題(E)をシンプレックス法により解き、その最適な基底形式表現における、制約条件式の非基底変数の係数行列をG、目的関数の係数ベクトルをλ^*とし、非基底変数の添字集合をJ'とする。このとき、新たな変数領域を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\bar{l}_j &= \max\left\{l_j, e_j - \frac{K}{\underline{R}_j}\right\} \\
\overline{u}_j &= \min\left\{u_j, e_j + \frac{K}{|\overline{R}_j|}\right\}
\end{aligned}
$$

x_jに対応するiと、$j \in J'$について、$\underline{R}_j, \overline{R}_j$は、

$$
\underline{R}_j = \begin{cases}
\infty & g_{ij} > 0\text{が存在しない。} \\
\min\left\{\frac{\lambda_j^*}{g_{ij}} \mid g_{ij} > 0\right\} & g_{ij} > 0\text{が存在する。}\ (\lambda_j^* \ne 0) \\
0 & \lambda_j^* = 0, g_{ij} > 0\text{となる}\ j\text{が存在する。}
\end{cases}
$$

$$\overline{R}_j = \begin{cases} \infty & g_{ij} < 0 \text{が存在しない。} \\ \max\left\{\frac{\lambda^*}{g_{ij}} | g_{ij} < 0\right\} & g_{ij} < 0 \text{が存在する。} \\ & (\lambda_j^* \neq 0) \\ 0 & \lambda_j^* = 0, g_{ij} < 0 \text{となる} \\ & j\text{が存在する。} \end{cases}$$

とし、x_jが非基底変数のときには、$\underline{R}_j = 0, \overline{R}_j = \lambda_j^*$とする。

4 初期変数領域

本研究では、初期変数領域を以下のように与え、比較・検討を行なう。

1. 制約領域を含むように、各変数に上限・下限を与える。

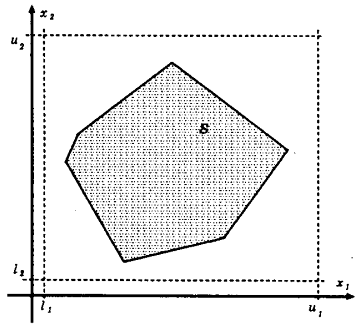

図 1: 初期変数領域 1

2. 各変数方向に対して、最大・最小値を求め、その結果をそれぞれ、上限・下限とする。つまり、以下の $2n$ の線形計画問題の結果を用いる。

$$\max_{x_j \in S} \pm x_j \qquad j \in J$$

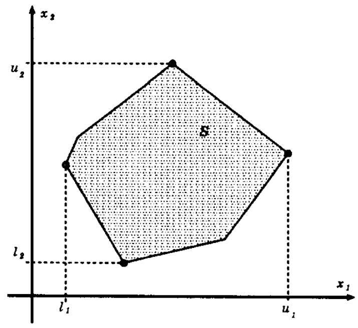

図 2: 初期変数領域 2

5 作業手順

1. 初期変数領域の設定。
   (a) 制約領域S全体を含むような$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$を決定する。
   (b) $2n$ の線形計画問題 $\max_{x_j \in S} \pm x_j, j \in J$ の結果から$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$を決定する。
2. 制約条件 Sにおいて、線形近似関数 f_eを目的関数とした線形計画問題 (E) を解く。
3. $Q(e) - E(e) \leq \varepsilon$であれば、終了。そうでなければ、次のステップへ。
4. 問題 (E) の結果から、新たな変数制約領域 $\overline{\boldsymbol{l}} \leq \boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{u}}$を生成し、ステップ 2 へ。

6 おわりに

この解法では、変数領域についての下限・上限を用いて目的関数の線形近似を行い、変数領域の縮小を繰り返すことで大域的最適解を得ている。線形近似問題により得られた端点は、比較的良い局所的最適解であると考えられることから、この端点からの切除平面法を導入、あるいは、線形近似に関して、より元の関数の情報を組み込むことによる全体のステップ数の減少を図っていく。

参考文献

[1] L.S.Thakur,"Domain Contraction in Nonlinear Programming : Minimizing a Quadratic Concave Objective over A Polyhedron" *Mathematics of Operations Research* Vol.16, No2,390-407(1991).

[2] 今野 浩, "線形計画法" 日科技連出版 (1987)

[3] 今野 浩, 山下 浩, "非線形計画法", 日科技連出版 (1978)