1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

2目的MPMオープンショップスケジューリング問題

02601974 大阪大学 *毛利 進太郎 MOHRI Shintaro
01005194 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki
01603604 帝塚山大学 益田 昭雄 MASUDA Teruo

1 はじめに

これまで, 多くのスケジューリング問題に関する研究では目的関数が単一の問題を扱ってきた. しかしスケジューリング問題においても現実には様々な評価基準があり、それら複数の目的関数を同時に考慮し, バランスあるスケジュールを求めることがより現実的であることも多い. このように複数の目的関数を同時に考慮する問題を多目的スケジューリング問題と呼ぶ. 一般にある目的関数に対して"最適である"スケジュールが, 他の目的関数においても"最適である"とは限らず, それゆえあらゆる評価基準においても最適であるスケジュールは存在しない場合が多い. したがって多目的スケジューリングでは非劣スケジュールと呼ばれる解の集合を求めそれより意思決定者が満足のいくスケジュールを選択する.

MPM(Multi-Purpose Machines) とは 1 つの機械で複数のオペレーションを行うことができる機械であり, それぞれの機械は割り当てられた幾つかのツールを用いて複数の異なるオペレーションを実行できる. n_i個のオペレーション $O_{ij}(j = 1,\ldots,n_i)$ からなる仕事 $J_i(i = 1,\ldots,n)$ があり, 機械 $M_k(k = 1,\ldots,m)$ があるとする. O_{ij}は機械の集合 $u_{ij} \subseteq \{M_1,\ldots,M_m\}$ において処理される. ここで任意の $i_1, i_2, j_1, j_2 (1 \le i_1, i_2 \le n, 1 \le j_1 \le n_{i_1}, 1 \le j_2 \le n_{i_2})$ に対し, $|u_{i_1j_1} \cap u_{i_2j_2}| \ge 0$ が成立する [1].

本研究では最大完了時間 C_{max}と納期ずれ L_{max} という 2 つの目的関数を持つ MPM オープンショップスケジューリング問題を考え, 線形計画問題として定式化し, その非劣スケジュールを構成する方法について述べる.

2 2目的MPMオープンショップスケジューリング問題

ここで本研究で取り扱う 2 目的オープンショップスケジューリング問題について述べる. n 個の仕事 $J_1,\ldots,J_n$と m 台の機械 $M_1,\ldots,M_m$があるとする. 各仕事 $J_i(i = 1\ldots n)$ はオペレーション $O_{i1},\ldots,O_{in_i}$からなる. オペレーション O_{ij}は機械の集合 $u_{ij} \subseteq \{M_1,\ldots,M_m\}$ において p_{ij}時間で処理される. オペレーションはどのような順番で処理しても構わない. また各オペレーションは分割処理が可能である. すなわち任意の時間に処理を中断し, また再開することが出来る. 各仕事は同時に複数の機械で処理することはできず, 各機械は同時に複数の仕事を処理することはできない. 各仕事 J_iには納期 d_iが決められており, 仕事 J_iの完了時間を C_iであらわすと, 納期ずれは

$$L_i = C_i - d_i$$

となり, 最大完了時間 C_{max}と最大納期ずれ L_{max} はそれぞれ

$$C_{max} = \max_i C_i$$
$$L_{max} = \max_i L_i$$

となる. この条件の下で C_{max}, L_{max}を同時に最小にするスケジュールは一般には存在しないので, これらを目的関数とする非劣解の集合を求める. 今ベクトル $v^\pi = (C^\pi_{max}, L^\pi_{max})$ を任意の可能スケジュールπに対する目的関数 C^π_{max}, L^π_{max}からなるベクトルとする. 二つのベクトル $v^1 = (v^1_1, v^1_2), v^2 = (v^2_1, v^2_2)$ に対し $v^1_1 \le v^2_1$かつ $v^1_2 \le v^2_2$であるとき, v^1は v^2に優越するといい,$v^1 \le v^2$であらわす. またある可能スケジュールに対し, 優越するスケジュールが存在しないとき, 非劣スケジュールであると呼ばれる [2].

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

3 線形計画問題への定式化とスケジュールの構成

非劣スケジュールを求めるためにパラメータ y を導入する. yによってC_{max}は$C_{max} \leq y$と制限され, その下でL_{max}を最小にするスケジュールを求める. まず納期$d_i(i = 1, \ldots, n)$をソートし、得られた結果を$d'_1 < d'_2 < \ldots < d'_q$とする。ここで$q$は異なる納期の数である。また仕事の集合$S_l, \overline{S}_l$を$S_l = \{J_i \mid d_i = d'_l\}(l = 1, \ldots, q), \overline{S}_l = S_l \cup \ldots \cup S_q$, と定義し,$T_i$を$T_i = \{l \mid J_i \in \overline{S}_l, l = 1, \ldots, q\}, i = 1, \ldots, n$ と定義する. x_{ij}^{kl}を仕事J_iのオペレーションO_{ij}が機械M_kで区間$[d'_{l-1}, d'_l)$の間に処理される時間を表わすとする. またpは$d'_l \leq y$となる最大のlの値とする.

以下の線形計画問題$P^p(y)$を考える.

minimize z subject to

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{kl} \leq d'_l - d'_{l-1}, l = 2, \ldots, p-1, J_i \in \overline{S}_l,$$

$$\sum_{J_i \in \overline{S}_l, j} x_{ij}^{kl} \leq d'_l - d'_{l-1}, l = 2, \ldots p-1, k = 1, \ldots m,$$

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{k1} \leq d'_1 + z,\ J_i \in \overline{S}_1,$$

$$\sum_{J_i \in \overline{S}_1, j} x_{ij}^{k1} \leq d'_1 + z,\ k = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{kp+1} \leq y - d'_p,\ J_i \in \overline{S}_{p+1},$$

$$\sum_{J_i \in \overline{S}_{p+1}, j} x_{ij}^{kp+1} \leq y - d'_p,\ k = 1, \ldots, m,$$

$$z \geq y - d'_p$$

$$\sum_{l \in T_i, l \leq p} x_{ij}^{kl} = p_{ij},$$

$$x_{ij}^{kl} \geq 0, \quad \begin{array}{ll} l = 1 \ldots p+1, & i = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, n_i, & k = 1 \ldots m \end{array}$$

問題$P^p(y)$を解くことによって$C_{max} \leq y$の下でのL_{max}の最小値を得る.

また$P^p(y)$の最適解x_{ij}^{kl}を用いて実際のスケジューリングを構成する方法について述べる. それぞれの区間$[d'_{l-1}, d'_l)(l = 1, \ldots, p+1)$について, 同じ機械に割り当てられている同じ仕事に属する部分を合わせて1つの仕事と考える. すなわち仕事$\bar{J}_i^{kl}(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m)$を考え, 仕事$\bar{J}_i^{kl}$の機械$M_k$上での処理時間を$\bar{p}_i^{kl} = \sum_j x_{ij}^{kl}(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m)$とすることにより, i仕事,m機械の中断可能なオープンショップ問題$O \mid pmtn \mid -$に帰着することができ実際のスケジュールを構成することが出来る[3]. $f^p(y)$を$P^p(y)$におけるzの最適値であるとする. そのとき以下の定理1,2が成立する.

定理 1 $f^p(y)$は区間$[d'_l, y_l]$において凸関数であり, 区分的に線形で, かつyに対し非増加関数である. ただしy_lは$y_l(y) = y - d'_l$が成立する最小のyである.

定理 2 $f^p(y), y \in [d'_l, y_l], l = r, \ldots, q$の単調増加域と対応する$y$の変域において非劣スケジュールのスケジュールベクトルは$(y, f^p(y))$の形で与えられる. ここでrは$d'_k \leq C_{max}^*$を満たす最大のkの値であり, 一般性を失わずに$C_{max}^* > d'_1$を仮定する.

4 おわりに

本研究では最大完了時間C_{max}と納期ずれL_{max}という2つの目的関数を持つMPMオープンショップスケジューリング問題に対し, 線形計画問題として定式化し, それより非劣スケジュールを構成する方法について考察を行った. またこの問題をネットワークフロー問題に帰着して解くことが出来る. それについては当日説明する予定である. なおこの研究は文部省科学研究費基盤研究(c)(2)08680460による援助を受けている.

参考文献

[1] Peter.Brucker, "Scheduling Algorithms", Springer(1995).

[2] H.Ishii, "Multiobjective scheduling problems",Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,405(1992).

[3] E.L.Lawer and J.Labertoulle "On Preemptive Scheduling of Unrelated Parallel Processors by Linear Programming ", Journal of the ACM 25(1978) pp.612-619.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.