1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ファジィランダム線形計画問題

入会予定　大阪大学　*片桐　英樹　KATAGIRI Hideki
01005194　大阪大学　石井　博昭　ISHII Hiroaki
02003584　大阪大学　伊藤　健　ITOH Takeshi

1　はじめに

不確実な状況下における数理計画法として、確率計画法、ファジイ数理計画法が考えられ、これまで多くの研究が進められてきた。これらの研究には、不確実な要素が、確率的またはファジイのどちらかの場合のみ扱っているものが多いが、現実には、それら二つを同時に含む状況も多いと思われる。これら二つの不確実性が同時に存在する場合として、ファジイランダム変数を含んだ線形計画問題を考え、この状況下での意志決定法を示す。

2　定式化

次のような線形計画問題を考える。

$$
\begin{aligned}
P_1 \ : \quad & \textit{minimize} \quad \mathbf{cx} \\
& \textit{subject to} \quad \mathbf{ax} = b \\
& \qquad\qquad\quad \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

ただし、$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_m), \mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m), \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m)^t$とする。

いま、制約式の右辺の値bを次のようなメンバーシップ関数に制限されるファジイランダム変数とする。

$$\mu_B(b) = R(u(b - d(\omega))^2)$$

ここでuは正定数，$d(\omega)$は確率密度関数f, 確率分布関数Fをもつ確率変数とする。Rは

$$R : [0, +\infty) \to [0, 1];\ R(0) = 1;\ R(r') = 0$$

なる上半連続非増加関数である。

μ_Bは$d(\omega)$に伴って確率変数となる。即ち、bのメンバーシップ値が確率的に変動することになる。bは不確実な値であるので、制約等式を常に満たす$\mathbf{x}$は存在しない。そのため左辺と右辺の値に差異$y = b - \mathbf{ax}$が生じるが、この値もbを介してつぎのようなメンバーシップ関数に制限されるファジイランダム変数となる。

$$\mu_Y(y) = \mu_B(y + \mathbf{ax})$$

この差yの大きさは小さい方が望ましいので、「y^2はf_0以下である」というようなファジィ目標 G を設定し、その可能性測度$\Pi_Y(G)$を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\Pi_Y(G) &= \sup_y \min\{\mu_Y(y), \mu_G(y)\} \\
&= \sup_y \min\{\mu_B(y + \mathbf{ax}), \mu_G(y)\}
\end{aligned}
$$

この可能性測度はμ_Bを通して、確率的に変動する。ここで、$\Pi_Y(G) \geq h$とすれば

$$
\begin{aligned}
& \sup_y \min\{\mu_B(y + \mathbf{ax})\ ,\ \mu_G(y)\} \geq h \\
\Leftrightarrow \quad & d(\omega) - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^+ \leq \mathbf{ax} \\
& \qquad \leq d(\omega) + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^- \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{ax} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^- \leq d(\omega) \\
& \qquad \leq \mathbf{ax} + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^+
\end{aligned}
$$

と変形され、確率制約条件となる。ただし、$\mu_G(r)$は$-\sqrt{f_0} \leq r \leq \sqrt{f_0}$で$\mu_G(r) = 1$, $r \leq 0$

で単調増加, $r \geq 0$ で単調減少の上半連続関数とし

$$R^*(h) = \begin{cases} \sup\{r|R(r) > h, r \geq 0\} & (h < 1) \\ 0 & (h = 1) \end{cases}$$

$$\mu_G^*(h)^- = \inf\{r|\mu_G(r) > h\}$$

$$\mu_G^*(h)^+ = \sup\{r|\mu_G(r) > h\}$$

である。よって、この可能性測度がある値 h 以上である確率αを一定として、h を最大化することにより、P_1を基に次の再定式化を行う。

$$\begin{aligned} P_2 \ : \quad & maximize \quad & -\mathbf{cx} + Q\left(\Pi_Y(G)\right) \\ & subject\ to \quad & P\left(\Pi_Y(G) \geq h\right) \geq \alpha \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、$Q(\cdot)$ は増加関数である。よって、制約式は

$$P\left(\mathbf{ax} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^- \leq d(\omega) \leq \mathbf{ax} + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^+\right) \geq \alpha$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{x}, h) &= \mathbf{ax} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^- \\ t_2(\mathbf{x}, h) &= \mathbf{ax} + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G{}^*(h)^+ \end{aligned}$$

とおくと、

$$P\left(t_1(\mathbf{x}, h) \leq d(\omega) \leq t_2(\mathbf{x}, h)\right) \geq \alpha$$

より、

$$F\left(t_2(\mathbf{x}, h)\right) - F\left(t_1(\mathbf{x}, h)\right) \geq \alpha$$

となる。ここで左辺を $s(t_1) = F(t_1+T) - F(t_1)$ とし、$s(t_1) \geq \alpha$ となる t_1の範囲を求める。ただし、Tは t_1と t_2の差 $T(h) = t_2(\mathbf{x}, h) - t_1(\mathbf{x}, h)$ で h の増加関数である。関数 $s(t_1)$ の導関数を求めると

$$\frac{ds}{dt_1} = f(t_1 + T) - f(t_1)$$

であり、密度関数 fを $t_1 < m$ で単調増加、$t_1 \geq m$ で単調減少な連続関数とし、$\frac{ds}{dt_1} = 0$ となる t_1をβとするとβは唯一存在し、$s(t_1)$ の増減は次のようになる。

t_1	$-\infty$	$\cdots$	β	$\cdots$	$+\infty$
$s'(t_1)$	—	+	0	−	—
$s(t_1)$	0	↗	最大	↘	0

よって $s(t_1) \geq \alpha$となる範囲は、

$$\gamma^*(h)^- \leq t_1(\mathbf{x}, t) \leq \gamma^*(h)^+$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \gamma^*(h)^- &= \inf\{t_1|s(t_1) \geq \alpha\} \\ \gamma^*(h)^+ &= \sup\{t_1|s(t_1) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

したがって、P_2は次の問題 P_3と等価となる。

$$\begin{aligned} P_3 : \ & maximize \quad -\mathbf{cx} + Q(h) \\ & subject\ to \\ & \gamma^*(h)^- \leq \mathbf{ax} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G^*(h)^- \leq \gamma^*(h)^+ \end{aligned}$$

3 おわりに

上記の問題の解法は、本研究の詳細と併せて発表会当日に説明する予定である。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究 (C)(2)08680460によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] R.Kruse & K.D.Meyer, "Statistics with vague data", D.Reidel Publishing Company(1987).

[2] 石井博昭, "「講座　数理計画法 10, 数理計画法の応用〈理論編〉」伊理正夫, 今野浩編, 第一章確率論的最適化" 産業図書.

[3] 伊藤, 石井, "可能性測度による線形計画問題の二段階定式化", 京都大学数理解析研究所講究録 899(1995).