1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

辺連結度増加関数の計算法

01403794　京都大学　永持 仁　NAGAMOCHI Hiroshi
京都大学　*白木 孝　SHIRAKI Takashi
01001374　京都大学　茨木 俊秀　IBARAKI Toshihide

1 はじめに

重み付き無向グラフ $G=(V,E,c_G)$ (c_G は実数値容量) において, カットを V の部分集合 $X(\subset V)$ で表し, カット X の容量 $d_G(X)$ を端点がそれぞれ X と $V-X$ に属する全ての辺の容量の和で定義する. またグラフ G の辺連結度を $\min\{d_G(X) \mid X \neq \emptyset, V,\ X \subset V\}$ と定義する. そのとき, グラフ G に新たな容量をもつ辺を付加したり, 幾つかの既存の辺の容量を増加させることによりグラフ G の辺連結度を k にする問題を考える. この問題は高い信頼性をもつネットワークの設計などにおいて重要な応用を持つ. そしてグラフ G を k-辺連結にする為に最低限必要な辺容量の総増加量を $\Lambda_G(k)$ と表し, $\Lambda_G(k)$ を G に対する辺連結度増加関数と呼ぶ. 図 1のグラフ G に対する辺連結度増加関数 Λ_G を図 2に記す.

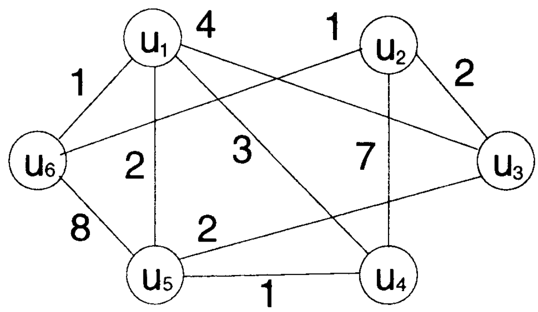

図 1: グラフGの例

これまで $\Lambda_G(k)$ を計算する方法としては, 固定された k に対する $\Lambda_G(k)$ の値を計算する $O(n(m+n\log n))$ 時間のアルゴリズムが既に開発されている [2]. ただし $n=|V|, m=|E|$ である. しかしこれまで関数 Λ_G 全体を同定するグラフ論的算法は知られてなかった. 本研究ではこの関数 Λ_G を同定するアルゴリズムを開発した. つまり $\forall k$ に対して $\Lambda_G(k)$ を同時に計算することができる.

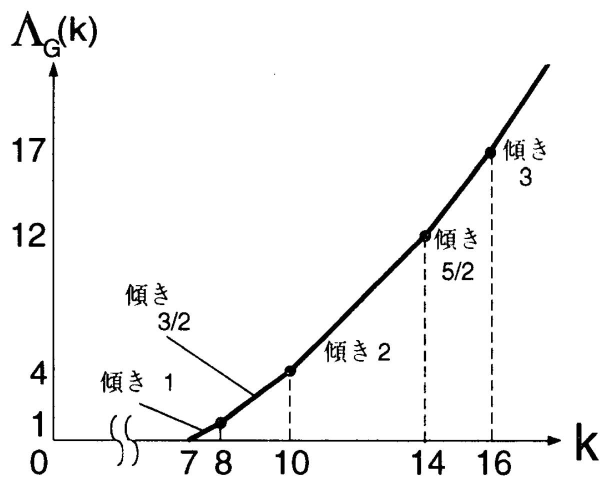

図 2: 実数値容量のグラフ Gにおける辺連結度増加関数 $\Lambda_G(k)$

2 k が固定されている場合

Cai と Sun が Lovász の辺分離定理によって以下のことをを示した [1].

補題 1 [1] (**最適性の条件**) グラフ G に新たに点 s を置き, s と V の間にだけ辺を加え, その容量を次の (i), (ii) を満たすように定めたグラフ G' (図 3参照) が得られた時, $\Lambda_G(k)$ の値が加えられた辺の総容量の半分となる.

(i) s と V全体を分けるカットを除くすべてのカットの容量が k 以上になるように加える.

(ii) s と V の間の枝に加えるべき総容量が (i) を満たすために必要最低限になるように辺容量を加える. □

例として図1のグラフ G と $k=10$ を入力した時の G' の例を図3に示す．これは (i), (ii) を満たしている．補題1より $\Lambda_G(10) = (2+3+3)/2 = 4$ が得られる．

補題1をもとにして与えられた k に対し, $\Lambda_G(k)$ を計算する $O(n(m+n\log n))$ 時間のアルゴリズムが開発されている [2].

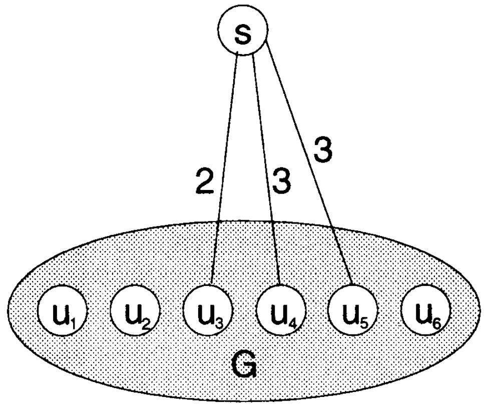

図 3: 図 1 のグラフ G, $k=10$ の入力に対して得られるグラフ G' の例

3 全ての $k \geq 0$ を同時に扱う

本研究では固定された k に対し, $\Lambda_G(k)$ を計算するアルゴリズムを改良して, 辺連結度増加関数 Λ_G 全体を求めるアルゴリズムを開発した．このために s に接続する辺に対しては, その容量の表し方を工夫する必要がある．なぜなら, 一般的には, G' の各辺に加えられる必要のある辺容量は k の値によって異なるからである．そこで辺容量を以下に定義するレンジという概念によって表すことにした．

2つの実数 $a, b \in \mathbf{R}^+$ に対し, 区間 $[a,b]$ をレンジ (range) と呼び, その大きさを $b-a$ で定義する．また R をレンジ集合 $\{[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_t,b_t]\}$ とする．R の大きさを表す各レンジの大きさの和を $\pi(R)$ と表し

$$\pi(R) = (b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\ldots+(b_t-a_t)$$

で定義する．与えられた $k \in \mathbf{R}^+$ に対して, R の上方 k-切り詰め (upper k-truncation) をレンジ集合

$$\left\{[a_i, \min\{b_i,k\}] \mid [a_i,b_i] \in R,\ a_i < k\right\}$$

と定義し，これを $R|^k$ と記す．

s と各点 $u \in V$ の間にある辺の (k によって変動する) 容量をレンジ集合 $R(u)$ で表すことにする．ただし, 任意に固定された k に対して, 辺 (s,u) の容量を $\pi(R(u)|^k)$ と定める．このとき, 任意に固定された k に対し，各辺 (s,u), $u \in V$ の辺容量 $\pi(R(u)|^k)$ が補題1を満たすようなレンジが求まれば全ての $k \geq 0$ に対し, $\Lambda_G(k)$ が得られたことになる．このようなレンジ集合族 $\{R(u) \mid u \in V\}$ の存在は自明ではないが, 本研究ではその存在を示すことができた．

例えば図1に対するこのようなレンジ集合族の例には, $R(u_1) = \{[10,\infty]\}$, $R(u_2) = \{[10,\infty]\}$, $R(u_3) = \{[8,\infty]\}$, $R(u_4) = \{[7,10],[14,\infty]\}$, $R(u_5) = \{[7,10],[14,\infty]\}$, $R(u_6) = [10,\infty]\}$ がある．$k=10$ のときの容量 $\pi(R(u)|^{10})$ を計算すると, 図3と同様になる．またこのレンジ集合族から, 図2の関数 Λ_G が得られる．

$\forall k$ に対し補題 1の条件を満たすレンジ集合 $R(u)$ の族を求めるアルゴリズムを開発した．

定理 1 $O(n(m+n\log n))$ で辺連結度増加関数 Λ_G を求めることができる □

更にアルゴリズムの挙動を解析することによって, 折れ点の存在範囲や傾きなど, 関数 Λ_G の様々な数学的特徴を明らかにした．

定理 2 Λ_G の折れ点は高々 $n-1$ 個しか存在しない． □

また辺容量を整数に限定した時の辺連結度増加関数を $\tilde{\Lambda}_G$ とすると $\tilde{\Lambda}_G(k)$ の値は $k \geq 2$ の場合には $\tilde{\Lambda}_G(k) = \lceil \Lambda_G(k) \rceil$ となることが知られているので容易に決定できる [1][2].

参考文献

[1] G.-R. Cai and Y.-G. Sun, *The minimum augmentation of any graph to k-edge-connected graph*, Networks, Vol.19, 1989, pp. 151-172.

[2] H. Nagamochi and T. Ibaraki, *Deterministic $\tilde{O}(nm)$ time edge-splitting in undirected graphs*, Proceedings 28th ACM Symposium on Theory of Computing, 1996, pp. 64-73.