1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

荷物の大きさを限定した場合の再配置問題のNP完全性

01605520　NTTﾏﾙﾁﾒﾃﾞｨｱﾈｯﾄﾜｰｸ研究所　*巳波弘佳　MIWA Hiroyoshi
01009550　豊橋技術科学大学　伊藤大雄　ITO Hiro

1．まえがき

再配置問題とは，容量を持った複数の倉庫と，それらに収容されている他の倉庫に移動すべき複数の荷物があるとき，与えられた移動回数以下で，全ての荷物を目的の倉庫に移動させる問題である．ただし，倉庫に収容されている荷物の大きさの和は，常にその倉庫容量を越えてはならない．

再配置問題に対しては既に，荷物の大きさが1に限定された場合，すべての荷物の移動可能性の判定及び移動手順の決定が線形時間で可能であることを明らかにした[1],[2]．一方荷物の大きさに制限を設けない場合は強NP完全であることも証明した[2]．本稿では，大きさが２以上の荷物の個数に制限を設けた場合，また荷物の大きさを1と2だけに制限した場合でも，なお強NP完全であることを証明する．

2．諸定義

倉庫と荷物をそれぞれ節点と枝に対応させることにより，再配置問題は，グラフを変形する問題として定式化できる．

【定義１】

有向多重グラフ$G=(V,E)$（ただし節点集合V，枝集合E，それぞれ$V(G)$, $E(G)$とも表す）．枝eの始点をs_e，終点をt_eと表し，枝eを(s_e,t_e)とも表す．□

次に，再配置問題を定義する．まず，ネットワーク$N=(G,c,d)$は，有向多重グラフ$G=(V,E)$，節点容量集合$c=\{c_v \mid v\in V\}$，枝容量集合$d=\{d_e \mid e\in E\}$からなる．節点$v\in V$の空き容量b_vとは$b_v=c_v-\sum_{\forall e\in E,\, s_e=v} d_e$で定義され，節点部分集合$S$の空き容量とは．$S$に含まれるすべての節点の空き容量の和で定義される．

ネットワークNに対する操作$Move(e)$ $(e\in E)$は以下のように定義される．まず，Eから枝eを取り除き，Eに$s_{e^*}=t_{e^*}=t_e$を満たすループe^*を付け加え，$d_{e^*}=d_e$とする．節点t_eの空き容量がd_e以上ならば操作$Move(e)$は実行可能であるとする．グラフGの枝を全てループにするような$Move$からなる操作列で，含まれる操作$Move$の数が与えられた正の自然数H以下ならば，$N=(G,c,d)$は実行可能なネットワークであると呼び，操作列を実行可能操作列と呼ぶ．

【定義２】（再配置問題）

INSTANCE: ネットワーク$N=(G,c,d)$，正の自然数H．ただしすべての節点$v\in V(G)$に対して$c_v\geq\sum_{\forall e\in E,\, s_e=v} d_e$を満たしており，$E(G)$はループを含まない．

QUESTION: Nは実行可能なネットワークか？　□

【定義３】(Vacancy Rule)

$$c_v\geq\sum_{\forall e\in E,\, s_e=v} d_e,\quad c_v\geq\sum_{\forall e\in E,\, t_e=v} d_e\quad (\forall v\in V(G))$$ □

【補題１】

実行可能な再配置問題はVacancy Ruleを満たす．□

3．大きさ２以上の荷物数に制限がある場合

本節では，大きさ2以上の荷物が２個しかない場合の再配置問題が，強NP完全であることを証明する．そのために，既知のNP完全問題である3-SAT[4]を帰着する．

【定義４】(3-SATISFIABILITY)

INSTANCE : リテラルの集合$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_L,\neg u_1,\neg u_2,\ldots,\neg u_L\}$，各節が含むリテラルの個数がちょうど３であるような節の集合$C=\{C_1,C_2,\ldots,C_M\}$．

QUESTION : Cのすべての節を充足できる真理値割当ては存在するか？　□

【定理１】

ネットワークが$N=(G,c,d)$ $(d_{e1},d_{e2}\geq 2,\ d_e=1 \text{ for } {}^{\forall}e\in E-\{e_1,e_2\})$に限定された再配置問題は強NP完全．

（証明）

再配置問題は明らかにクラスNPに属する．よって，以下でNP困難性を示す．

3-SATの問題例$P_0=(U,C)$から再配置問題の問題例$N_0=(G,c,d)$を次のように構成する．

まず，次のようにグラフGを構成する．各変数u_iに対して，節点$v_1{}^i,\ldots,v_{2p(i)}{}^i$及び$\neg v_1{}^i,\ldots,\neg v_{2q(i)}{}^i$からなる２本の系列を作り，節点$v_s{}^i$から$v_1{}^i$, $\neg v_1{}^i$に，$v_{2p(i)}{}^i$, $\neg v_{2q(i)}{}^i$から節点$v_t{}^i$に枝を張る．ここで，$p(i)$, $q(i)$はそれぞれu_i, $\neg u_i$が節の集合Cの中で現れる個数である．これを変数u_iに対応するローブという．また，$v_t{}^i$から$v_s{}^{i+1}$ $(1\leq i\leq L-1)$に，節点s_1から$v_s{}^1$に，$v_t{}^L$から節点t_1に枝を張る．更に節点s_2からすべての$v_j{}^i$, $\neg v_j{}^i$（jは奇数）に枝を張る．節に対応して節点$c_1,c_2,\ldots,c_M$を用意し，節点$v_j{}^i$, $\neg v_j{}^i$（jは偶数）から，添字の小さいものから$j/2$番目にu_i $(\neg u_i)$が含まれる節に対応する節点に枝を張る．更に，すべての$v_j{}^i$, $\neg v_j{}^i$（jは奇数）とすべての$v_t{}^i$から節点Aに枝をそれぞれ一本張る．また節点$c_1,c_2,\ldots,c_M$から容量Mの節点t_2にそれぞれ枝を一本ずつ張り，節点$c_1,c_2,\ldots,c_M$から節点Aにそれぞれ枝を2本ずつ張る．更に節点t_2から節点s_1へ，節点Aから節点s_2へそれぞれ枝を一本張る．以上のようにして構成されたグラフGを用いて図１のようにネットワーク$N_0=(G,c,d)$を構成する．枝(t_2,s_1), (A,s_2)の

容量をそれぞれM, 5M+Lとし，それ以外の全ての枝の枝容量を1とする．次に節点容量を，t_1を1，t_2, s_1をM，s_2を7M+L，Aを5M+L，$c_1,...,c_M$を3，その他の節点は2とする．以上のようにして作られたネットワークは明らかにVacancy Ruleを満足する．

次に，再配置問題の問題例$N_0=(G, c, d)$と3-SATの問題例$P_0=(U, C)$の解が一致することを示す．

まず，$P_0=(U, C)$が実行可能とする．この時，次のようにN_0に関する操作列を構成する．節点s_1から節点t_1へ各ローブを通過してパスを取ることができるが，変数u_iが真（偽）ならば，そのパスはu_iに対応するローブの下（上）側を通過するとし，このパスに沿ってパスの終端の枝から逆順に操作*Move*を適用する．パスのすべての枝に操作を適用し終わった時点で，節点s_1の空きはMとなるので，枝容量Mの枝(t_2, s_1)に操作*Move*が適用でき，それに続いて枝(c_1, t_2), (c_2, t_2),...,(c_M, t_2)に操作が適用できる．各節点$c_1, c_2, ..., c_M$に対応する各節には少なくとも一つ真であるリテラルを含んでいるから，$u_i(\neg u_i)$が真ならば，u_iに対応するローブの上側（下側）の節点を通過して節点s_2と節を結ぶ互いに枝独立なパスが各節ごとに一つ存在する．これらのパス全てに対してパスの終端の枝から逆順に操作*Move*を適用する．すると節点s_2の空き容量は5M+Lとなるので，枝容量5M+Lの枝(A, s_2)に操作*Move*が適用できる．続いて節点Aに入っている枝全てに操作を適用すると，残っている全ての枝は，終点の空き容量が1のパスの集合を構成するので，それらの全てのパスの終端から逆順に操作を適用する．従って，3-SATの解から再配置問題N_0の解（実行可能操作列）を構成することができた．

逆に，$N_0=(G, c, d)$が実行可能とすると，上で示した順序で操作*Move*を適用しなければ全ての枝をループ化できない．なぜなら，枝(A, s_2)に操作を適用する前に必ず枝(t_2, s_1)に操作を適用しておかねばならないが（なぜなら節点s_2の空き容量をMにするためにはt_1とs_1の空きを全てs_2に集めなくてはならない），そのためにはt_1の空きをs_1に移動しなければならない．s_1からt_1への適当なパスに沿って逆順に操作を適用して空きを移動する際，下側（上側）を通過したローブに対応する変数には真（偽）を割り当てる．t_2の空き容量がMになった時点で，s_2, t_2間には$c_1, c_2, ..., c_M$を経由して独立なM本のパスが存在しなければならないが，それらのパスがローブの上側（下側）を通る時はそのローブに対応する変数は真（偽）であり，節はすべて充足されている．従ってN_0の解から3-SATの解を構成することができた．

また，節点及び枝の容量は全てM, Lの多項式，すなわち$|V|, |E|$の多項式で押さえられるので，題意の再配置問題は強NP完全である．　□

4．荷物の大きさが1と2だけに限定されている場合

【定理２】

ネットワークが$N=(G, c, d)$ ($^{\forall}e \in E, d_e=1$ or 2)に限定された再配置問題は強NP完全．

（証明）

定理１の問題例において，枝(A, s_2), (t_2, s_1)をそれぞれ図２のネットワークX(5M+L, 5M+L), X(M, M)で置き換えたネットワークN_1を考える．X(g, h)は，Q(h)から出ているh本の枝すべてに操作が適用された時に限り，P(g)に入っているg本の枝すべてに操作を適用することができる．定理１の証明と同様にして3-SATと解が一致することが示せる．　□

5．まとめ

本稿では，大きさが２以上の荷物が２個だけの場合でも，また，荷物の大きさを1と2だけに制限した場合でも，なお強NP完全であることを証明した．

参考文献

[1]Miwa, Ito, "Complexity and Algorithm for Reallocation Problem", IEICE Trans.on Funds., Vol.E79-A, No.4, pp.461-468, 1996.

[2]巳波，伊藤，"再配置問題に対する線形時間移動手順決定アルゴリズム"，第9回 回路とｼｽﾃﾑ軽井沢ﾜｰｸｼｮｯﾌﾟ予稿集，pp.277-282, 1996.

[3]S. Even, A. Itai, and A. Shamir, "On the complexity of timetable and multicomodity flow problems", SIAM J. Comput., vol. 5, no. 4, pp.691-703, 1996.

[4]M. Garey and D. Johnson, "Computers and Intractability", W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco, 1978.

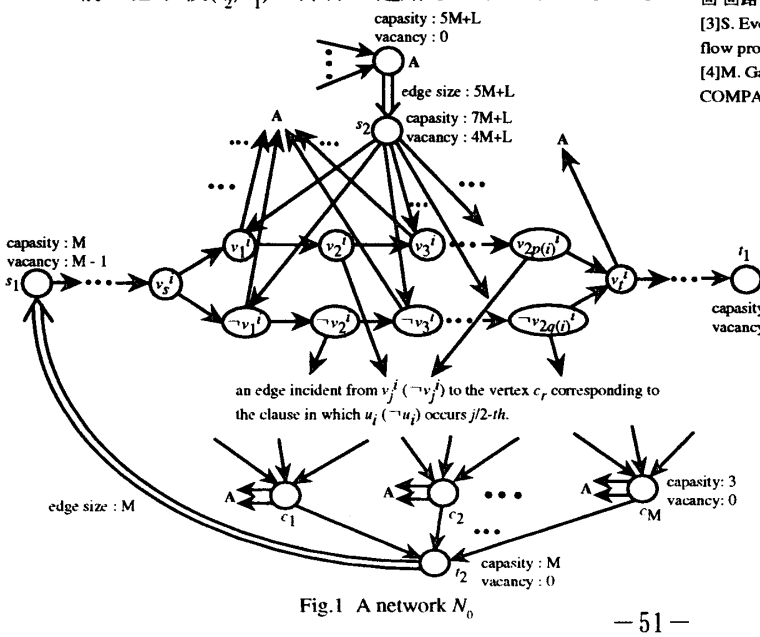

Fig.1 A network N_0

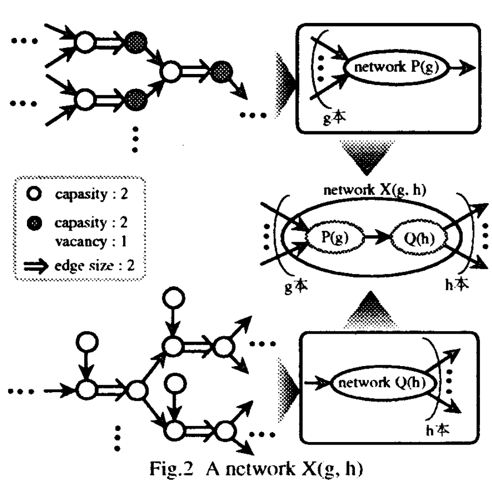

Fig.2 A network X(g, h)