1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

高点連結度の効率的計算法

01009550　豊橋技術科学大学情報工学系　伊藤大雄　ITO Hiro
豊橋技術科学大学情報工学系　横山光雄　YOKOYAMA Mitsuo

1．はじめに

グラフの連結度の判定あるいは計算をする問題は重要な問題であり、多くの研究成果がある[1]。連結度には点連結度と枝連結度があるが、本稿では点連結度に着目し、点連結度が高い場合に高速に動くアルゴリズムを与える。すなわち、グラフGの(n-p)-点連結性を判定する問題を考え、$n-p=\Omega(n)$の場合に$O(m+np^{3.5})$時間で動作するアルゴリズムを与える。但しnは節点数、mは枝数である。本アルゴリズムはグラフGの点連結度$\kappa(G)$がn-p以上である場合には、$\kappa(G)$も同時に求めることが出来る。

これまでは、グラフのk-点連結性を判定する最高速のアルゴリズムは$O(k^2n^{1/2}m+knm)$時間かかった[2]。すなわちpが定数の場合には、(n-p)-点連結性の判定には$O(n^{4.5})$時間かかった。しかし本稿で提案するアルゴリズムはこれを線形時間O(n+m)で解く。また、0<c<1である任意の定数cに対する$\lfloor cn \rfloor$-点連結性の判定は、本アルゴリズムはこれまでの最高速のアルゴリズムと同じ$O(n^{4.5})$時間を達成している。

2　諸定義

G=(V,E)を無向単純グラフ、節点数をn、枝数をmとする。２節点$x,y\in V$間の点連結度を$\kappa(x,y;G)$、グラフGの点連結度を$\kappa(G)$と表す。$G^c=(V,E^c)$, $E^c=\{(x,y) \mid (x,y)\notin E\}$をGの補グラフと呼ぶ。G=(V,E)、$S,T\subseteq V$に対し$E(S,T;G)=\{(x,y)\in E \mid x\in S, y\in T\}$とする。

G=(V,E)に対しVが二つの部分集合$S,T\subseteq V$ ($S\cup T=V$, $S\cap T=\phi$) に分割され、$E(S,S)=E(T,T)=\phi$となるとき、Gは二部グラフと呼ばれ、G=((S,T),E)とも表現される。本稿では$S,T\neq\phi$のものを特に狭義二部グラフと呼ぶ。

$x\in V$の次数をd(x;G)、隣接節点集合をA(x;G)で表す。各記号"*(*;G)"はGが明らかな場合には";G"を省略する場合もある。

3　問題の性質

補題１　グラフG=(V,E)が(n-p)-点連結であるならば$|E|\geq(n-p)n/2$を満たす。□

証明）$\forall x\in V$, $d(x;G)\geq n-p$より自明。Q.E.D.

補題２　グラフGが(n-p)-点連結である必要十分条件は、補グラフG^cが、$|V(H)|\geq p+1$である狭義完全二部グラフHを部分グラフとして含まないことである。□

証明）定義よりGが(n-p)-点連結でない必要十分条件は、Vが３つの部分集合$S,T,W\subseteq V$ ($S\cup T\cup W=V$, $S\cap T=S\cap W=T\cap W=\phi$) に分割され、$|S|,|T|\geq 1$, $|W|<n-p$, $E(S,T;G)=\phi$を満たすことである。これは$H=((S,T),E(S,T;G^c))$が$|V(H)|\geq p+1$を満たす狭義完全二部グラフであることと同値である。Q.E.D.

補題３　グラフG=(V,E)において、$d(x;G^c)\geq p$である節点$x\in V$が存在するならばGは(n-p)-点連結ではない。□

証明）$S=\{x\}$,$T=A(x;G^c)$とおき、補題２を考慮すれば証明できる。Q.E.D.

補題２より、グラフの(n-p)-点連結性の判定は補グラフが節点数p+1以上の狭義完全二部グラフを含むかどうかの判定問題に帰着されることが分かる。ここで、任意の$(x,y)\in E^c$を特定し、$(x,y)\in E(H)$である様な狭義完全二部グラフを探すことを考える。ここで

$V(x,y)=A(x;G^c)\cup A(y;G^c)$

$G(x,y)=(V(x,y), E(A(x;G^c),A(y;G^c); G))$

と定義する。

補題4　$G^c=(V,E^c)$、$(x,y)\in E^c$に対し、G^cの部分グラフHが$(x,y)\in E(H)$を満たす狭義完全二部グラフである必要十分条件は、$G(x,y)$において$V(x,y)-V(H)$がx,yを分離する点カットとなることである。□

証明）HをG^cの部分グラフで、$(x,y)\in E(H)$を満たす狭義完全二部グラフであるとする。任意の節点$u\in V(H)-\{x,y\}$に対し$u\in V(x,y)$であることから、Hは$G(x,y)$の部分グラフでもある。よって$V(x,y)-V(H)$は、$G(x,y)$においてx,yを分離する点カットとなる。

次に$W\subset V(x,y)$を、$G(x,y)$においてx,yを分離する点カットとする。則ち、$S,T\subset V(x,y)-W$, $S\cup T=V(x,y)-W$, $S\cap T=\phi$, $E(S,T;G(x,y))=\phi$, $x\in S$, $y\in T$を満たすS,Tが存在する。よって$H=((S,T),E(S,T;G^c))$は狭義完全二部グラフでG^cの部分グラフであり、しかも$(x,y)\in E(H)$である。Q.E.D.

以上より、次の定理を得る。

定理1　Gが(n-p)-点連結であることの必要十分条件は、全ての$(x,y)\notin E$に対し、$\kappa(x,y;G(x,y))\geq|V(x,y)|-p$となることである。□

証明）補題2、4より導かれる。Q.E.D.

4　解法

以上の議論から次のアルゴリズムを得る。

procedure HI-NODE-CON(G=(V,E),p)
begin
1　**if** there is a node x such that $d(x)\leq n-p-1$
　　then output "no"; **stop**;
2　Construct $G^c=(V,E^c)$
3　**for** $(x,y)\in E^c$ **do**
4　　Construct $G(x,y)$;
5　　calculate $\kappa(x,y;G(x,y))$;
6　　**if** $\kappa(x,y;G(x,y))\leq|V(x,y)|-p-1$
　　　then output "no"; **stop**;
7　**enddo**
8　output "yes";
end.

本アルゴリズムの正当性は補題1～4と定理1により保証される。よって次に計算時間を見積もる。第1行目は$O(n+m)$でできる。この操作により、2行目以降では

$$m\geq(n-p)n/2 \qquad (1)$$

$$d(x;G^c)\leq p,\ \forall x\in V \qquad (2)$$

となる。第2行の操作は$O(n^2)$時間かかるが、$n-p=\Omega(n)$の場合には(1)より$m=\Omega(n^2)$となるので第2行の操作は$O(m)$時間でできる。(2)より$V(x,y)\leq 2p$となるので、$G(x,y)$の節点数と枝数は各々$O(p)$と$O(p^2)$になる。よって4行目の操作は各$(x,y)\in E^c$に対して$O(p^2)$時間で実行可能。節点数n枝数mのグラフの特定節点組間の点連結度は$O(n^{1/2}m)$時間で計算できる[3]。よって第5行の計算は各$(x,y)\in E^c$に対して$O(p^{2.5})$でできる。(2)よりG^cの枝数は$O(np)$となるので、第3行の繰り返しは$O(np)$回行えば良い。以上からアルゴリズム全体の計算時間は$O(n^2+np^{3.5})$であり、$n-p=\Omega(n)$の場合には$O(m+np^{3.5})$となる。

謝辞　貴重な御意見を頂いた京都大学工学部の茨木俊秀教授ならびに永持仁助教授そして豊橋技術科学大学の増山繁助教授に感謝致します。

参考文献　[1] 永持仁, "グラフの最小カットについて," 藤重悟編, "離散構造とアルゴリズムII," 第4章, 近代科学社 (1993), pp 155-208.
[2] Z. Galil, "Finding the vertex connectivity of graphs," SIAM J. Comput., Vol. 9, No. 1 (1980), pp. 197-199.
[3] S. Even and R. E. Tarjan , "Network flow and testing graph connectivity," SIAM J. Comput, Vol. 4, No. 4 (1975), pp. 507-518.