1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ＤＥＡを用いたＣｏｎｊｏｉｎｔ解析

01405084　東洋紡㈱　野口　博司※　NOGUCHI Hiroshi
01005194　大阪大学　石井　博昭　ISHII　Hiroaki

1．はじめに

Conjoint解析は、数理心理学の分野において開発された一種の尺度構成法で、予め用意した諸要因の組み合わせに対する全体評価から、各要因に対する個別評価の尺度を求めるものである。一般に、選好された順序関係のﾃﾞｰﾀ からある基準をﾍﾞｰｽ に要因の個別評価の尺度を導く。その際の順序関係のﾃﾞｰﾀ は、ある一人の結果であることが多い。多人数の場合は、評点化して合計し順序付けするが、その妥当性についての議論は殆どない。本研究は、ＤＥＡﾓﾃﾞﾙ を用いて多人数の場合の順序付け法を提言したCOOK,W.Dら(1990)とその妥当性について検討したGREEN,R.H ら(1996)の研究内容を考察すると共に、妥当な順序付け法について論じる。そして、最も妥当に順序付けされた選好ﾃﾞｰﾀ からConjoint解析へ適用することを推奨する。またConjoint解析の持つ幾つかの問題点に対しての改善策を述べる。その一つが非線形分数計画法を用いた解を一意に求める方法である(1996)。更に、その解法の結果が多人数の人気投票比率結果との適合性にも優れていることを示す。

2．ＤＥＡﾓﾃﾞﾙ を用いた多人数の選好順序付け

ｍ個の対象に対して、ｎ人の者がｋ番目まで好きな順に選ぶとするとCOOK,W.Dら(1990)から、次のように定式化できる。但しｋ≪ｍ　。

$$Y_{ii}(\varepsilon)=\text{Maximize}\ \sum_{j=1}^{k} w_{ij}v_{ij} \quad \text{for } i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

subject to:

$$Y_{iq}(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{k} w_{ij}v_{qj}\leq 1 \quad \text{for } q=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} w_{ij}-w_{i,j+1}\geq d(j,\ \varepsilon)\ \text{for } j=1,2,\cdots,k-1 \\ w_{ik}\ \geq d(k,\ \varepsilon) \\ d(.,\ \varepsilon),\ \varepsilon\geq 0\ ,\ d(.,0)=0 \\ d(.,\ \varepsilon)\ \text{は}\varepsilon\text{の単調増加} \end{array}\right]$$

即ち $w_{i1}\geq w_{i2}\geq w_{i3}\geq\cdots\ \geq w_{ik}$　(3)

$d(j,\ \varepsilon)=\varepsilon$ の値の取り方によりｍ個の選好順序が決まる。ε の値とｍ個の順序との関係をﾃﾞﾝﾄﾞﾛｸﾞﾗﾑにしてその過程を考察することが出来る。

$d(j,\ \varepsilon)$ は ε 以外に $\varepsilon/j!$, ε/j, 0 等を取ることも考えられるが、(3)より間隔尺度にする必要はないので、その重みを、1/j とするのなら ε/j と置く時が一番妥当な順序付けになると思われる。

また、GREEN,R.H ら(1996)の cross-evaluation からｍ個の順序付けを行う方法は

$$V_{qj}=\sum_{x=1}^{j} v_{qx}\quad ,\quad w_{ij}=\sum_{x=j}^{k} W_{ix}$$

から、(1)(2)は(4)(5)のようになる。

$$Y_{ii}=\text{Maximize}\ \sum_{j=1}^{k} W_{ij}V_{ij} \quad \text{for } i=1,2,\cdots,m \tag{4}$$

subject to:

$$Y_{iq}=\sum_{j=1}^{k} W_{ij}V_{qj}\leq 1 \quad \text{for } q=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

この Y_{ii} 値を導きｍ×ｍの行列の列和を求め、その平均値よりｍ個の対象の順序を一意に決めることが出来る。

ここで、以下のような階層の考えに立てば、

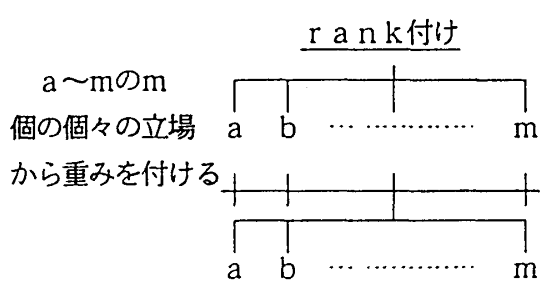

図１．ｍ個の個々の立場での重み付け

最終的にａ～ｍの立場で Y_{ii} の値の合成重要度を求めることがrank付けに繋がると考える。

すると、$QY=\phi_{max}\ Q$　(6)

QはY$_{ii}$の各々の row-vectorであり、ϕ_{max} は各 row-vectorの中で各要素の和が最大になるものが対応する。Y$_{ii}$の行列の対象要素は必ずしも逆数関係にはないが、それに近いものと考えて、AHP的に最大固有値の固有ﾍﾞｸﾄﾙからm個の順序付けを行うことが出来る。また、a〜mのm個の個々の立場からの重み付けを逆数関係にして、最終の評価を前述のY$_{ii}$の列和平均値を逆数関係にすれば、AHPそのものでrank付けが可能となる。

3．Conjoin解析への適用とその解法

Conjoint解析の代表的手法であるMONANOVA(MO-Notone ANalysis Of VAriance)を用いて以下にその適用とその解法を示す。

2章で求めた多人数の妥当な選好順序結果から一般的には次のように最急降下法を用いて解を導く。

$Z = [z_1, z_2, \cdots, z_m]'$; Y$_{ii}$の単調変換値ﾍﾞｸﾄﾙ

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21}\cdots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22}\cdots & d_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{mh} \end{bmatrix}$$; 要因の属性を示す 0-1ﾃﾞｻﾞｲﾝ 行列 h は属性水準

$b = [b_1, b_2, \cdots, b_h]'$; 求める効用ﾊﾟﾗﾒｰﾀ

$\hat{Z} = Db$; ﾓﾃﾞﾙ 値 (7)

$Z = Db + \varepsilon$

$\bar{\hat{Z}} = (\bar{\hat{z}})$; $\hat{z}_i$ の平均値ﾍﾞｸﾄﾙ

次にStressという適合性の基準が定義される。

$$S(\text{Stress}) = \sqrt{(Z-\hat{Z})'(Z-\hat{Z})/(\hat{Z}-\bar{\hat{Z}})'(\hat{Z}-\bar{\hat{Z}})} = \sqrt{R/U} \quad (\text{分子R, 分母U}) \tag{8}$$

そのStressが最小となるbを求めることになる。

最終的に $g = \partial S/\partial b = 1/U[\ (R^{1/2})' * U^{1/2} - R^{1/2}\ (U^{1/2})'\ ]$

$$= -S/U\, D'\ [1/S^2\ (Z-\hat{Z}) + (\hat{Z}-\bar{\hat{Z}})] \tag{9}$$

と勾配ﾍﾞｸﾄﾙgが求まる。

bの値を任意に定めb_0 からZを計算する。

次に(8)式よりStressを求め、Sをできるだけ小さくなるように(9)式でgを求めて演算を繰返す。

$$b_{l+1} = b_l - \alpha g_l \tag{10}$$

(l;反復回数、α;ｽﾃｯﾌﾟ 幅で逐次変化させる)

上記が従来の解法である。

我々は既に新しい解法(1996)を提言した。

一つは最小二乗法と単調性を用いて導く方法であり、もう一つは非線形分数計画法を用いて次のように解を導く方法である(1996)。

$\bar{\hat{Z}} = \overline{Db} = C$ として、Z(λ)を導入する。

$$Z(\lambda) = (Db-Z)'(Db-Z) - \lambda(Db-C)'(Db-C)$$
$$= (1-\lambda)b'D'Db - 2b'D'Z + \lambda b'D'C + Z'Z \quad \text{for ﾊﾟﾗﾒｰﾀｰ}\ \lambda \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{11}$$

定理1 Let $Z_\lambda = \min\ \{\ Z(\lambda)\ |\ b\}$

then if $Z^*_\lambda = 0$ at $\lambda = \lambda^*$

then $\lambda^* = \min\ \{S^2(f,\ b)\ |\ b\}$ (12)

(11)式よりZ(λ)はbのconvex関数であり、Z(λ)を最小にするb_λは(13)式より得られる。

$$\partial Z(\lambda)/\partial b = 2(1-\lambda)D'Db - 2D'Z + 2\lambda D'C = 0 \tag{13}$$

(13)式より求めたb_λを(11)式に代入して定理1からλ^*を導くと(8)式を最小にする値としてλ^* が求まり、ﾕﾆｰｸな解が導ける。求めたbに統計的処理を施して統計量として考察し易くする。特にZに多人数の人気投票比率を適用するｹｰｽ では、Zの和が100%になることからbの制約条件付きのConjointﾓﾃﾞﾙ になり、本方法が有用であることが言える。

4．おわりに

詳細な検討結果は具体的数値例にて紹介する。

本研究により、Conjoint解析の持つ幾つかの問題点(ﾃﾞｰﾀの妥当性、解の一意性等）が解決出来ると思われる。

【参考文献】

1)COOK,W.D.,et al(1990),"A data envelopment model for aggregating preference rankings",Management Science 36/11,1302-1310

2)GREEN,R.H.,et al(1996),"Preference voting & project ranking using DEA and cross-evaluation" European Journal of OR 90,461-472

3)野口・磯貝(1992)"ｺﾝｼﾞｮｲﾝﾄ解析" 大阪大学教養部研究集録, Vol.40,3月発行

4)H.NOGUCHI & H.ISHII(1996) "New method for solving the statistical value of part worths in Conjoint Analysis" Proceedings of the 2th Australia-Japan Workshop on Stochastic Model p.433-442