1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一般化ポリマトロイド上のM凸関数

01603194　京都大学　室田 一雄　MUROTA Kazuo
02201890　東京工業大学　*塩浦 昭義　SHIOURA Akiyoshi

1　はじめに

Dress と Wenzel [2] によって提案された付値マトロイドの概念を一般化することにより，室田 [5, 6, 7] はM凸関数の概念を導入した．M凸関数 $f: \mathbf{Z}^V \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は定義により次の性質を満たす:

(MB-EXC) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ s.t.
$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$.
ここで $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) < +\infty\}$, $\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in V \mid x(w) > y(w)\}$, $\mathrm{supp}^-(x-y) = \{w \in V \mid x(w) < y(w)\}$ であり，$\chi_w \in \mathbf{Z}^V$ は $w \in V$ の特性ベクトルである．性質 (MB-EXC) により $\mathrm{dom}\, f$ は基多面体 (に含まれる整数格子点集合) であることがわかる．

本稿の目的はM凸関数の概念を一般化ポリマトロイドへ拡張することである．一般化ポリマトロイド (以下，gポリマトロイド) は1981年に Frank により導入された概念である [3]．gポリマトロイドはポリマトロイドや基多面体の一般化であるが，基多面体と等価な概念であり，基多面体の射影により得られることが知られている．

定理 1 ([3, 4]) $Q (\subseteq \mathbf{Z}^V)$ はgポリマトロイド $\Longleftrightarrow$ **(G-PRJ)** $\tilde{Q} = \{(x, -x(V)) \in \mathbf{Z}^{V \cup \{v_0\}} \mid x \in Q\}$ は基多面体． ∎

ここで v_0 は V に含まれない新しい要素であり，$x(V) = \sum\{x(w) \mid w \in V\}$ である．この定理の観点から，gポリマトロイド上のM凸関数は次のように自然に定義される: $f: \mathbf{Z}^V \to \overline{\mathbf{R}}$ はgポリマトロイド上のM凸関数 $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

(MG-PRJ)

$$\tilde{f}(x, x_0) = \begin{cases} f(x) & (x_0 = -x(V)), \\ +\infty & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

は (MB-EXC) を満たす．

従って，gポリマトロイド上のM凸関数 f の定義域 $\mathrm{dom}\, f$ はgポリマトロイドとなる．gポリマトロイド上のM凸関数は必ずしも新しい概念とはいえないが，研究する価値は十分にある．

gポリマトロイド上のM凸関数は $\{x \in \mathbf{Z}^V \mid x(V) = k,\ f(x) < +\infty\}$ なる層上の関数の集まりと見られるが，本稿では層の構造，及び各層での最適化について議論する．gポリマトロイド上のM凸関数はネットワークフロー，施設配置問題，多項式行列などの組合せ最適化の様々な場面に現われる．ある種の貪欲解法を用いることでこれらの問題を解くことが出来る，ということは知られているが，我々の結果を適用することで，貪欲解法がうまく働く理由を明らかにすることが出来る．また，基多面体上のM凸関数に対する交換公理 (MB-EXC) の観点から，gポリマトロイド上のM凸関数の交換公理がどのように表されるか，という問題が自然と浮かび上がってくる．本稿では，gポリマトロイド上のM凸関数が同時交換公理により特徴づけられることも示す．

2　gポリマトロイド上のM凸関数の諸性質

(MB-EXC) を素直に翻訳すると，gポリマトロイド上でのM凸関数に対する交換公理が得られる:

(MG-EXC$_\mathrm{P}$) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$ に対し，(i) 及び (ii) が成立:

(i) $x(V) < y(V) \Longrightarrow \exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ s.t.
$f(x) + f(y) \geq f(x + \chi_v) + f(y - \chi_v)$,

(ii) $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対し，(ii-1) 又は (ii-2) が成立:

(ii-1) $x(V) > y(V)$ かつ $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u) + f(y + \chi_u)$,

(ii-2) $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ s.t.
$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$.

定理 2 (MG-PRJ) $\Longleftrightarrow$ (MG-EXC$_\mathrm{P}$) ∎

より美しいM凸関数の公理を得るために, まず g ポリマトロイドに対する同時交換公理を示す.

(G-EXC) $\forall x, y \in Q, \forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対し, (i) 又は (ii) が成立:
(i) $x - \chi_u,\ y + \chi_u \in Q$,
(ii) $x-\chi_u+\chi_v,\ y+\chi_u-\chi_v \in Q$ ($\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$).

定理 3 (G-PRJ) $\Longleftrightarrow$ (G-EXC). ∎

定理 3 の定量的拡張により次が得られる.

(MG-EXC) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f, \forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$,

$$f(x) + f(y) \geq \min[f(x-\chi_u) + f(y+\chi_u), \min_{v \in \mathrm{supp}^-(x-y)} \{f(x-\chi_u+\chi_v) + f(y+\chi_u-\chi_v)\}].$$

定理 4 (MG-PRJ) $\Longleftrightarrow$ (MG-EXC). ∎

基多面体上のM凸関数と同様に, g ポリマトロイド上のM凸関数も, 最小解の集合で特徴づけ出来る.

定理 5 $f : \mathbf{Z}^V \to \overline{\mathbf{R}}$ に対し, $\mathrm{dom}\, f$ は有界な g ポリマトロイドであると仮定する. f は (MG-EXC) を満たす $\Longleftrightarrow$ $\arg\min_{x \in \mathbf{Z}^V} \{f(x) - \sum_{w \in V} p(w)x(w)\}$ は g ポリマトロイド ($\forall p \in \mathbf{R}^V$). ∎

3 g ポリマトロイド上のM凸関数の層構造

関数 $f : \mathbf{Z}^V \to \overline{\mathbf{R}}$ 及び各 $k \in \mathbf{Z}$ に対し, f の $\{x \in \mathbf{Z}^V \mid x(V) = k,\ f(x) < +\infty\}$ への制限を f_k と定義し, f の層と呼ぶ. 以下, 特に断らない限り f は (MG-EXC) を満たすとする. $\lambda = \min\{x(V) \mid f(x) < +\infty\}$, $\mu = \max\{x(V) \mid f(x) < +\infty\}$ と定義する. 各整数 k ($\lambda \leq k \leq \mu$) に対して $\alpha_k^* = \min\{f(x) \mid x(V) = k\}$ と定める.

定理 2 より, M凸関数の各層は良い性質をもつことがわかる.

定理 6 $\mathrm{dom}\, f_k \neq \emptyset$ ならば f_k は (MB-EXC) を満たす. ∎

従って, 各層での最小化問題は, 基多面体上のM凸関数に対する貪欲解法により解くことができる.

次に, 隣接する層の関係に対する性質を述べる. $M_k = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid x(V) = k,\ f(x) = \alpha_k^*\}$ とする.

定理 7 (i) $x_k^* \in M_k$ ($\lambda \leq k \leq \mu - 1$) 及び $f(x_k^* + \chi_v) = \min\{f(x_k^* + \chi_w) \mid w \in V\}$ なる $v \in V$ に対し, $x_k^* + \chi_v \in M_{k+1}$.
(ii) $x_k^* \in M_k$ ($\lambda + 1 \leq k \leq \mu$) 及び $f(x_k^* - \chi_u) = \min\{f(x_k^* - \chi_w) \mid w \in V\}$ なる $u \in V$ に対し, $x_k^* - \chi_u \in M_{k-1}$. ∎

この性質より, 全ての層の最適解を求める貪欲解法が構築できる. $\{\alpha_k^*\}$ が凸性を有することを, 次の定理により確かめることが出来る.

定理 8 $\alpha_{k-1}^* + \alpha_{k+1}^* \geq 2\alpha_k^*$ ($\lambda + 1 \leq \forall k \leq \mu - 1$). ∎

最後に, 大域的な最小解に対する性質を示す.

定理 9 (**[5, 6]**) $f(x) \leq f(y)$ ($\forall y \in \mathbf{Z}^V$) $\Longleftrightarrow$

$$f(x) \leq \min[\min_{u,v \in V} f(x-\chi_u+\chi_v), \min_{u \in V} f(x-\chi_u), \min_{v \in V} f(x+\chi_v)].$$ ∎

参考文献

[1] A. W. M. Dress and W. Wenzel, "Valuated matroid: A new look at the greedy algorithm," *Appl. Math. Lett.* 3 (1990) 33–35.

[2] A. W. M. Dress and W. Wenzel, "Valuated matroids," *Adv. Math.* 93 (1992) 214–250.

[3] A. Frank, "Generalized polymatroids," in: A. Hajnal et al., eds., *Finite and Infinite Sets*, North-Holland (1984), 285–294.

[4] S. Fujishige, "A note on Frank's generalized polymatroids," *Discrete Appl. Math.* 7 (1984), 105–109.

[5] K. Murota, "Submodular flow problem with a nonseparable cost function," Report No. 95843-OR, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Universität Bonn (1995).

[6] K. Murota, "Convexity and Steinitz's exchange property," Extended abstract in *Proc. of IPCO V*, LNCS 1084, Springer-Verlag (1996), 260–274. Full paper to appear in *Adv. Math.*

[7] K. Murota, Discrete convex analysis, preprint No. 1065, Kyoto University (1996).